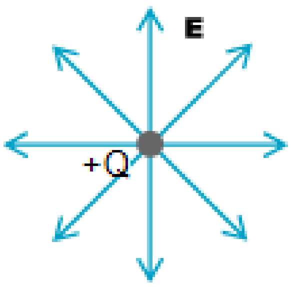
CH-7

Steady Magnetic Field

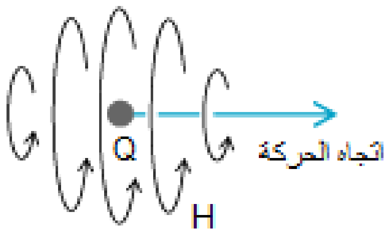
في هذا الملف سنتناول مواضيع الفصل السابع مع ملاحظات وشروح باللغة العربية

Fixed charge



الشحنة الساكنة لها مجال كهربائي فقط ويكون شعاعيا الى كل الاتجاهات

Movige charge



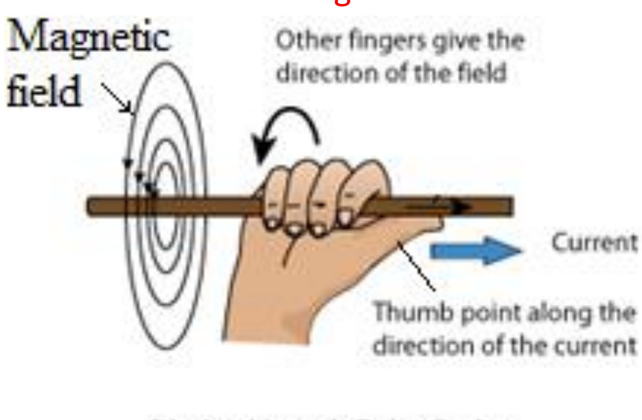
الشحنة المتحركة لها (إضافة الى المجال الكهربائي) مجالا مغناطيسيا دوارا حول مسار الشحنة ويمكن تحديده بواسطة قاعدة اليد اليمنى (انظر الرسم ادناه)

H: Magnetic field intensity (A/m)

J: current density (A/m^2)

K: surface current density (A/m)

To determine the magnetic field direction

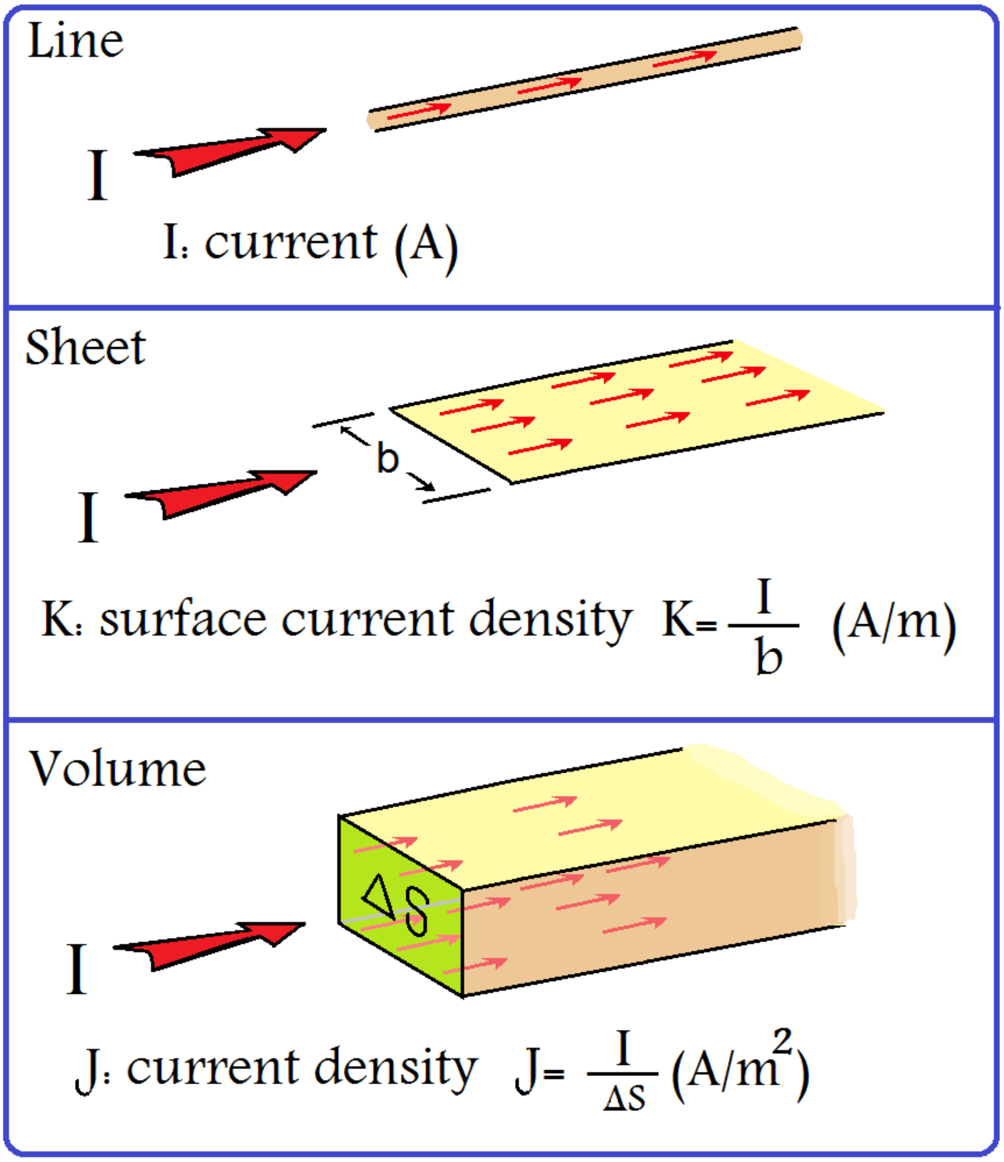


Right Hand Grip Rule

The source of the steady magnetic field:

- Permanent magnet
- Electric field changing linearly with time
- direct current.

Types of Current distribution



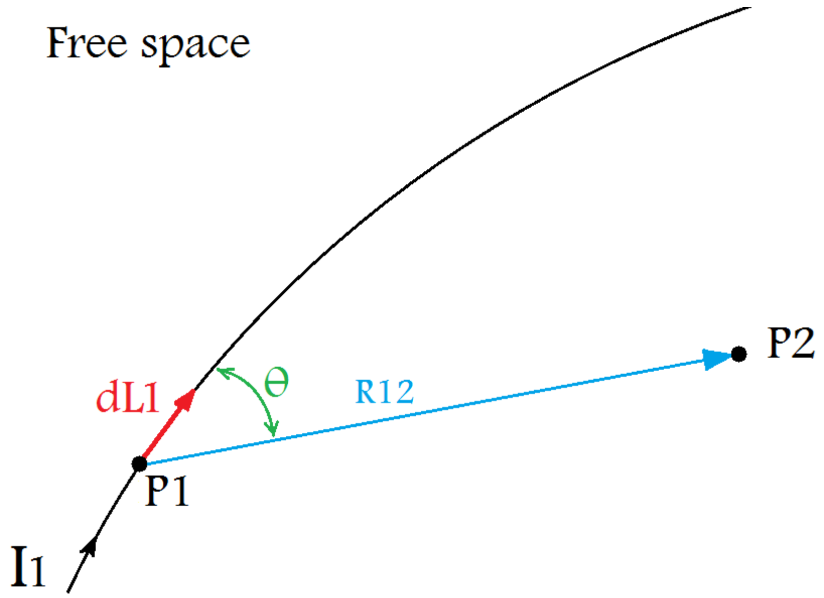
Biot- savart law:

at any point *P* the magnitude of the magnetic field intensity produced by the differential element is proportional to the product of the current, the magnitude of the differential length, and the sine of the angle lying between the filament and a line connecting the filament to the point *P* at which the field is desired; also, the magnitude of the magnetic field intensity is inversely proportional to the square of the distance from the differential element to the point *P*.

نص قانون بايوت سفرت

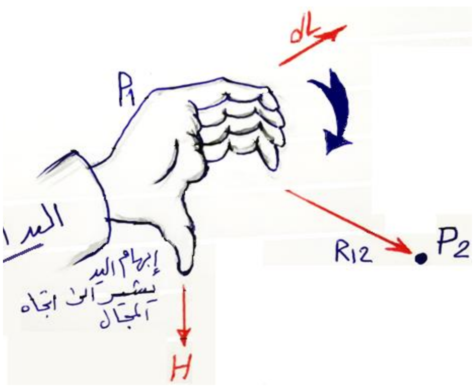
في نقطة معينة P2 فان شدة المجال المغناطيسي الناجمة عن حركة تيار I خلال عينة صغيرة *dL* تتناسب طرديا مع حاصل ضرب التيار I مع قيمة *dL* ومع جيب الزاوية الحاصلة بين *dL* والخط الواصل بين *dL* والنقطة P2 وعكسيا مع مربع بعد نقطة القياس P2 عن *dL*.
وثابت التناسب هو (*1/4π*)

$$\mathrm{d}\mathbf{H_2} = \frac{I_1 dL_1 1 \times \boldsymbol{a_{R12}}}{4\pi\, R_{12}^2} \dashrightarrow \qquad \boldsymbol{H} = \oint \frac{IdL \times \boldsymbol{a_R}}{4\pi\, R^2}$$



ملاحظات حول قانون **Biot- Savart**

- يكون اتجاه المجال المغناطيسي عمودي على المستوي الذي يحوي *dL* والخط الواصل بين *dL* و P وباتباع قاعدة اليد اليمنى

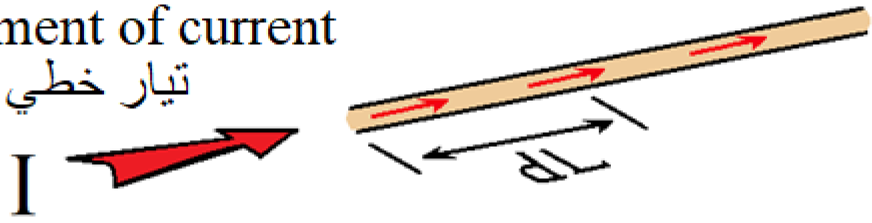


- تستعمل قاعدة اليد اليمنى لايجاد اتجاه المجال حيث تدور الاصابع من dL نحو P عبر الزاوية الأصغر كما في الشكل المجاور فيشير الابهام نحو اتجاه المجال.

Current Density

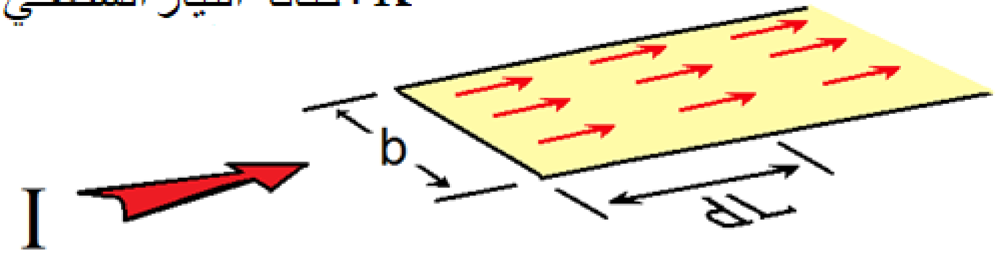
filament of current

تيار خطي



surface current desity K=I/b (A/m)

كثافة التيار السطحي : K



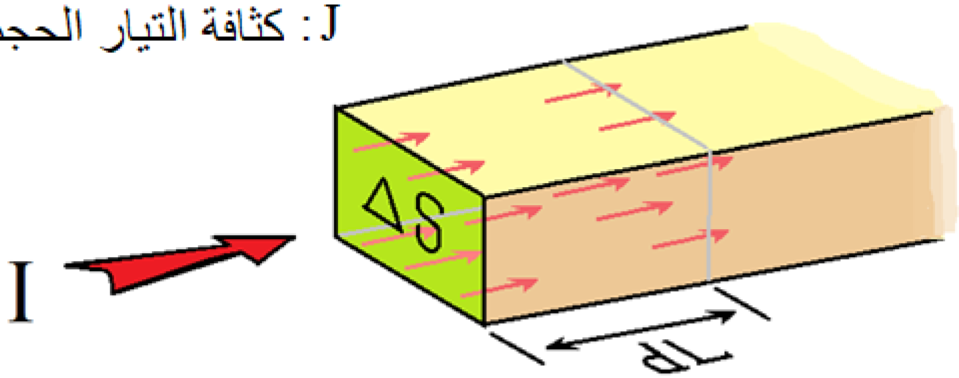
I=Kb

IdL=Kb dL =KdS

b dL =dS

volume current density J=I/(area) (A/m^2)

كثافة التيار الحجمي : J



I=JΔS

IdL=JΔSdL=JdV

ΔS dL=dV

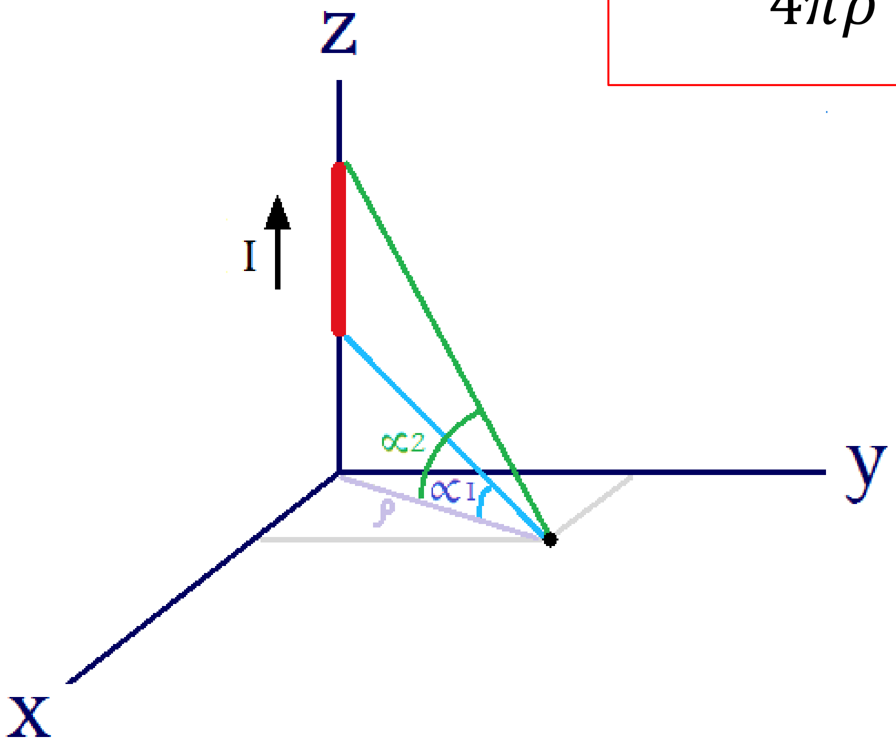
If the current is the same in the three cases:

$$\underset{(A.m)}{IdL} = \underset{(A.m)}{KdS} = \underset{(A.m)}{JdV}$$

Magnetic field due to a limited segment of current

لحساب المجال المغناطيسي من جراء تياريسري بخط محدود الطول

$$\boxed{H = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha 2 - \sin\alpha 1)\, a\emptyset}$$

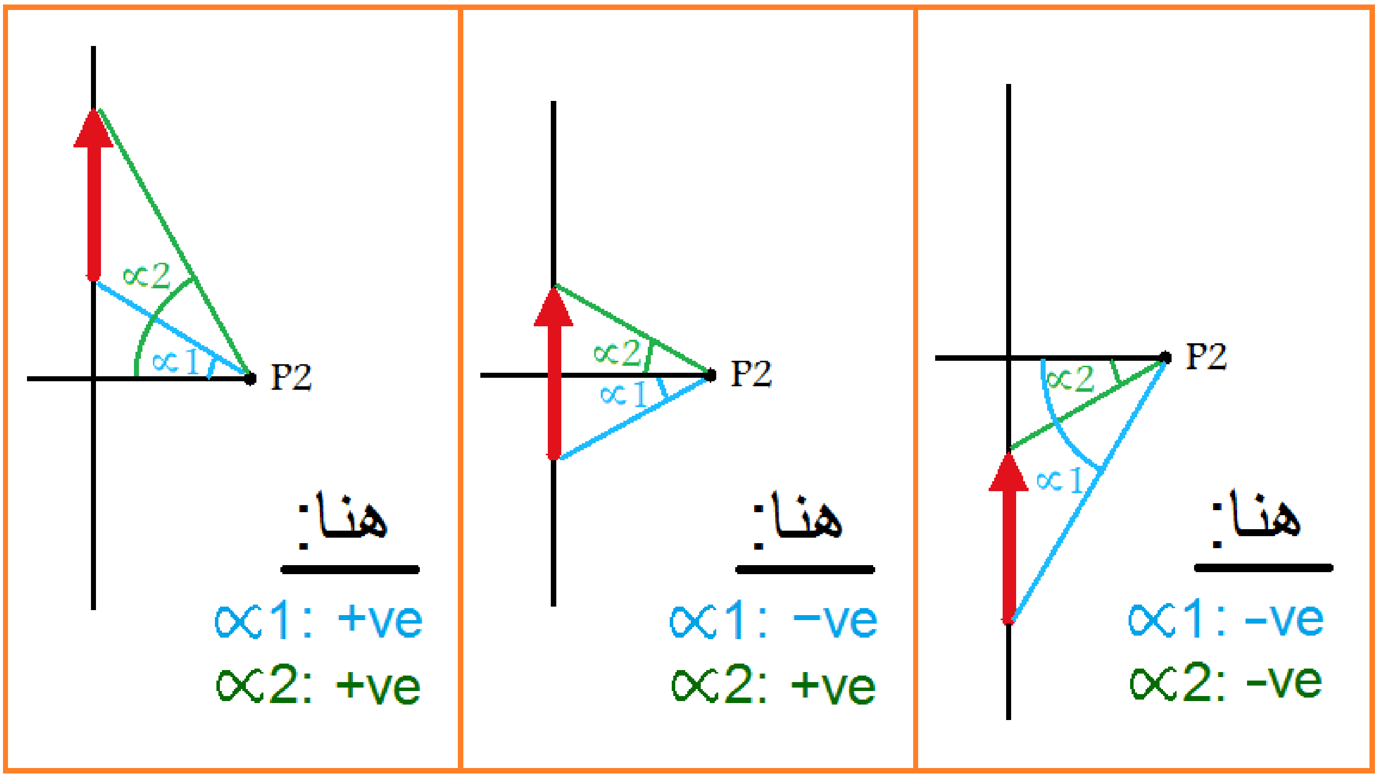


ρ: هو المسافة العمودية من نقطة الحساب نحو قطعة التيار او امتدادها.

α1 زاوية بداية قطعة التيار عن العمود على امتداد التيار انظر الشكل

α2 زاوية نهاية قطعة التيار عن العمود على امتداد التيار انظر الشكل

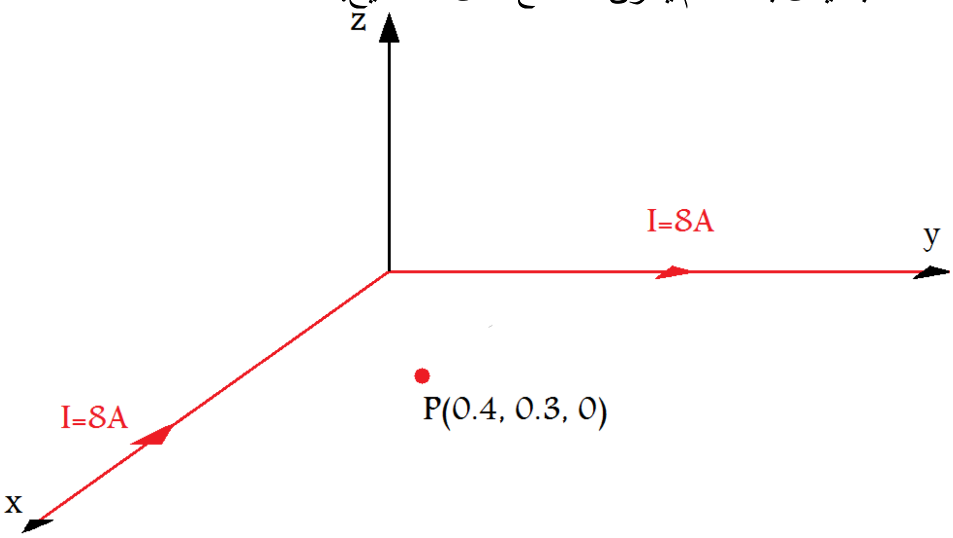
❖ من الممكن ان تكون زوايا البداية و أو النهاية سالبة أو موجبة حسب موقع النقطة من قطعة التيار انظر الشكل أدناه:

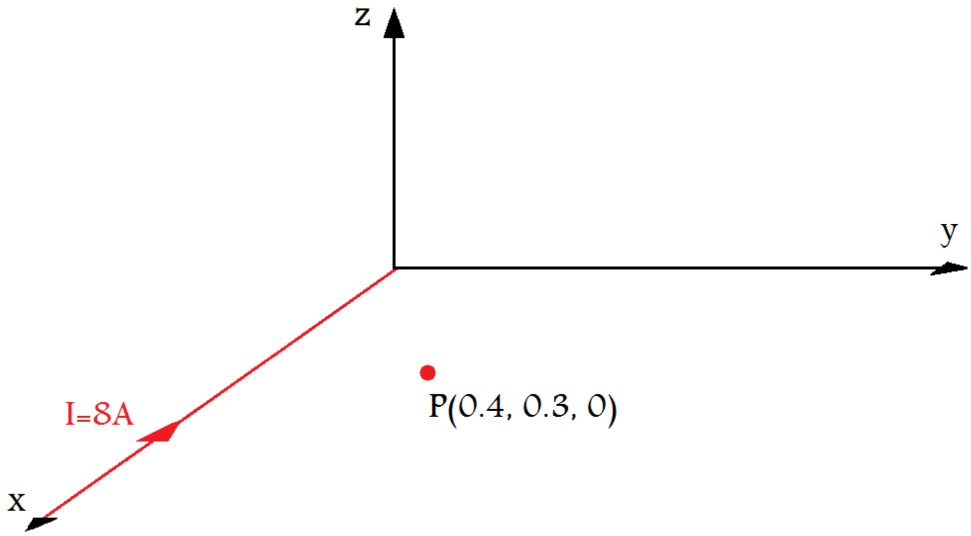


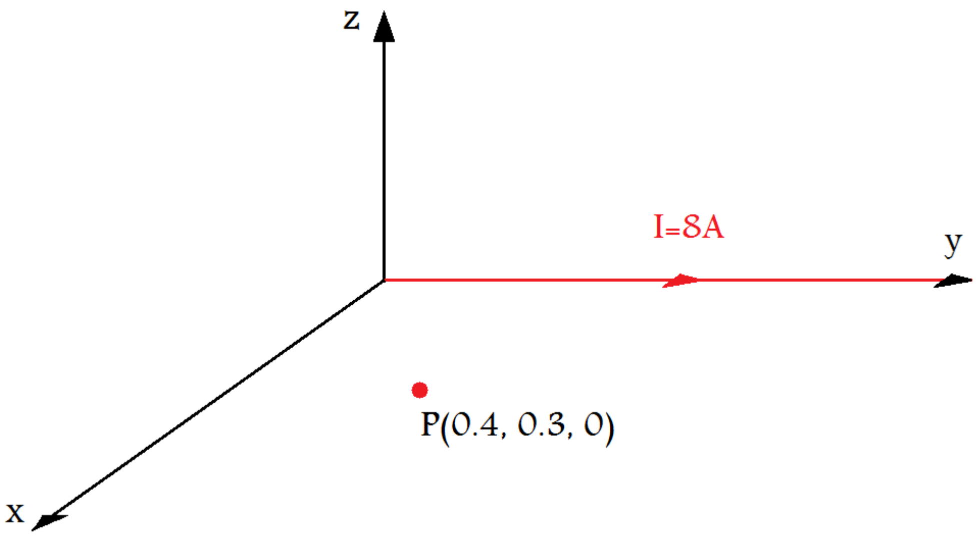
- **Example:** P 187 في الكتاب سنطرحه هنا كتمرين للطالب وهو محلول في المحاضرات وفي الكتاب:

Determine H at P2(0.4, 0.3, 0) in the field of I=8A. afilament current is directed inward from infinity to the origin on a positive x-axis , and then outward to infinity along y-axis as shown in the figure below:

الحل موجود في المحاضرات (بخط اليد)
ونعطي هنا فرصة للطالب ليحل بنفسه ثم يقارن حله مع الحل الصحيح.




z
y
x
I=8A
P(0.4, 0.3, 0)


z
y
x
I=8A
P(0.4, 0.3, 0)

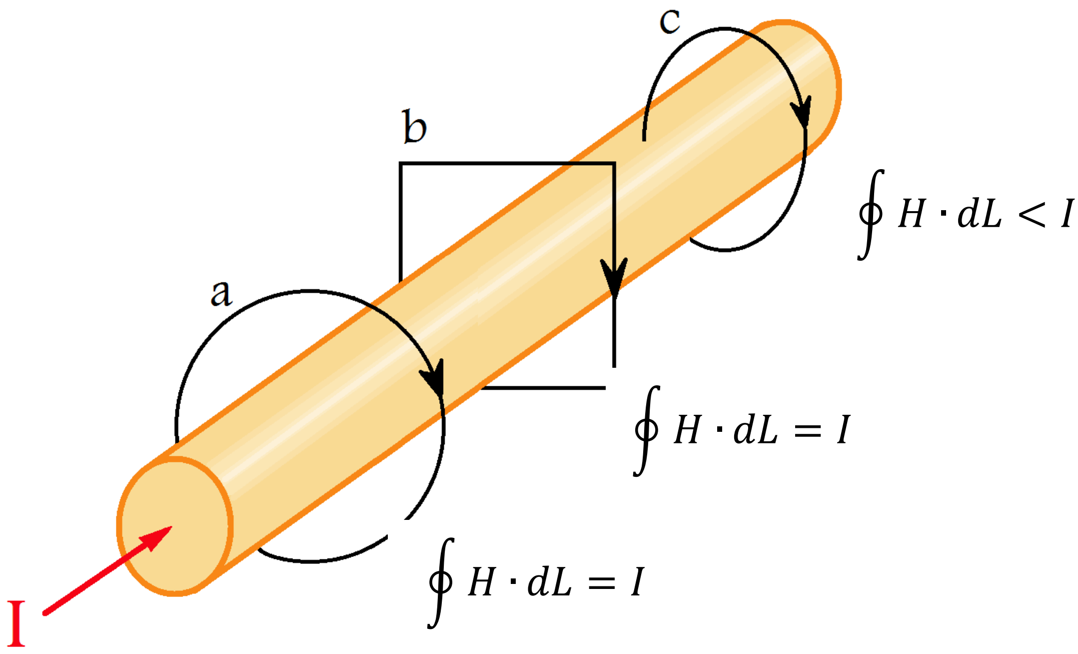
AMPERE’S CIRCUITAL LAW

نص القانون

The line integral of **H** about any *closed* path is exactly equal to the direct current enclosed by that path

(تكامل الخط لشدة المجال المغناطيسي H حول اي مسار مغلق يساوي بالضبط التيار المستمر المحاط بذلك المسار)

$$\boxed{\oint H \cdot dL = I}$$



The application of Ampere's circuital law

The application of Ampere's circuital law involves finding the total current enclosed by a closed path.

We choose a path, to any section of which:شروط اختيار المسار

1- **H** is either perpendicular or tangential, (*perpendicularity make the result of dot product is zero. While the tangency allows us to replace the dot product of Ampere's circuital law with the product of the scalar magnitudes*)

1- يكون H أما عمودي أو مماسي للمسار (التعامد يجعل نتيجة ضرب ال dot صفراً , اما المماسية فيمكننا من تحويل ضرب ال dot الى ضرب اعتيادي)

2- H is constant along along the path.

(constancy permits us to remove the magnetic field intensity from the integral sign)

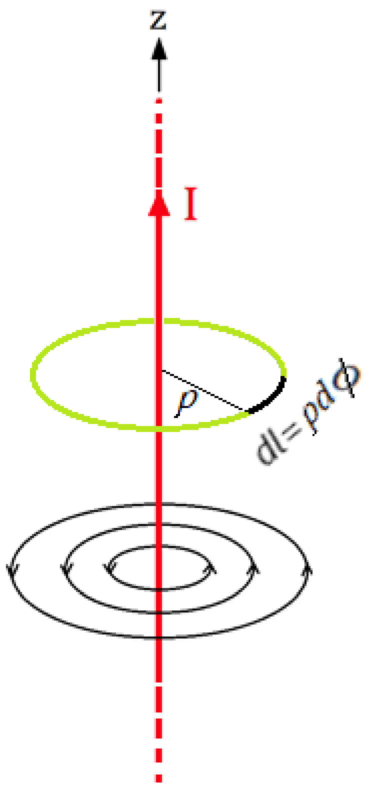
2- يكون المجال H ثابتا على امتداد المسار (كي يسمح باخراج H خارج التكامل)

تطبيقات على قانون (AMPERE'S CIRCUITAL LAW)

<u>**App. 1**</u> Finding the magnetic field intensity produced by an infinitely long filament carrying a current *I* .

لو كان لدينا تيار مستمر مقداره I على امتداد محور z كما في الشكل التالي:

- نختار المسار بحيث يحقق الشروط آنفة الذكر: حيث يجب اولا ان نعرف شكل واتجاه خطوط المجال المغناطيسي يواسطة قاعدة اليد اليمنى: انظر الشكل في الاسفل.
- ثم نحدد شكل المسار المغلق: وهو حلقة دائرية يمر من مركزها التيار عموديا على مستوى الحلقة لكي يحقق الشرطين ، انظر الشكل الى اليسار.



اتجاه المجال بدوران يميني
حسب قاعدة اليد اليمنى

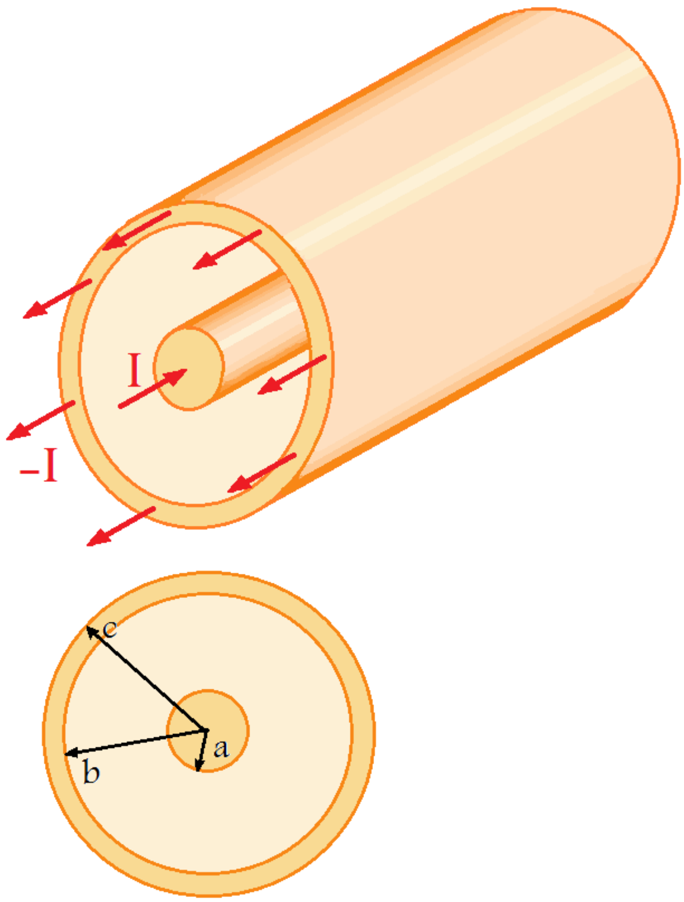
ثم نطبق قانون (Amper circuital law) على المسار المغلق الجديد: $\oint H \cdot dL = I$

$$\int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} Ha\emptyset . \rho d\emptyset a\emptyset = I \rightarrow \rho H(\emptyset)_0^{2\pi} \rightarrow I = 2\pi\rho H =$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{H = \frac{I}{2\pi\rho} a\emptyset}$$

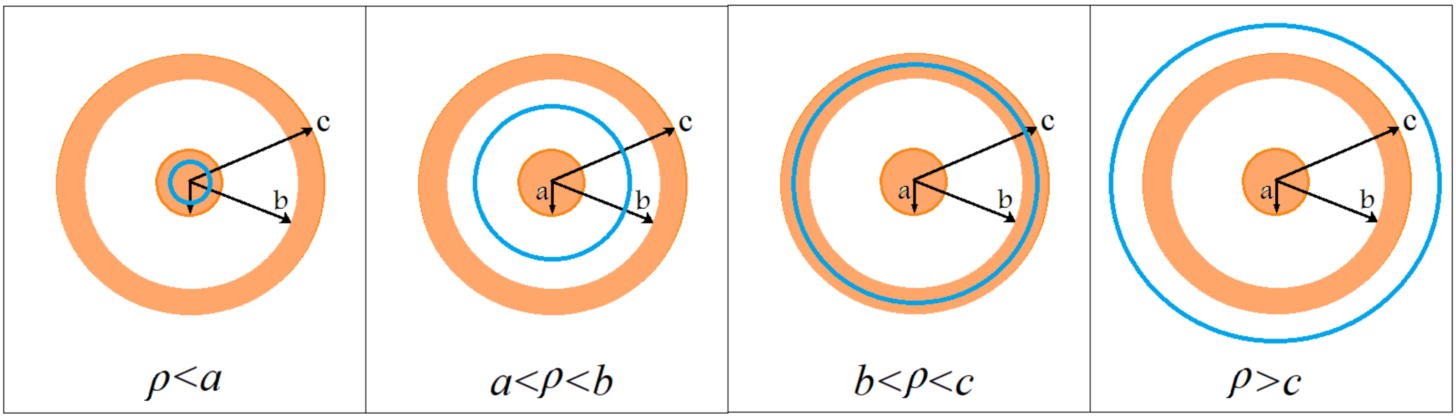
<u>App. 2</u> : Infinitely long coaxial transmission line carrying a uniformly distributed total current *I* in the center conductor and −*I* in the outer conductor.

لايجاد المجال المغناطيسي للقابلو المحوري (coaxial cable) بطول لانهائي يحمل تيار في الموصل المركزي مقداره I بينما يحمل الموصل المحيطي (الخارجي) تيارا معاكسا وبنفس القيمة(-I) لاحظ الشكل:



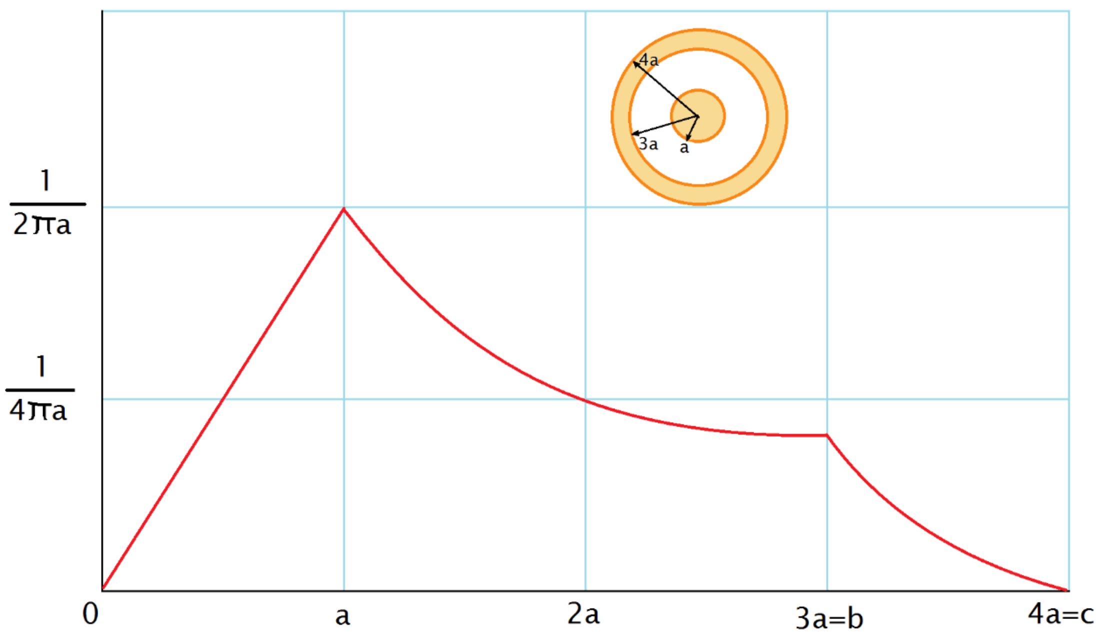
راجع الحل (موجود في المحاضرة) حيث ناخذ مسار مغلق في كل منطقة يتطلب ايجاد المجال فيها (وهنا نحتاج ان نجد المجال في اربعة مناطق: وكما يلي:

(1) $a < \rho$, (2) $a < \rho < b$, (3) $b < \rho < c$, (4) $\rho > c$ انظر الشكل التالي: (المسار المغلق مرسوم باللون الازرق)



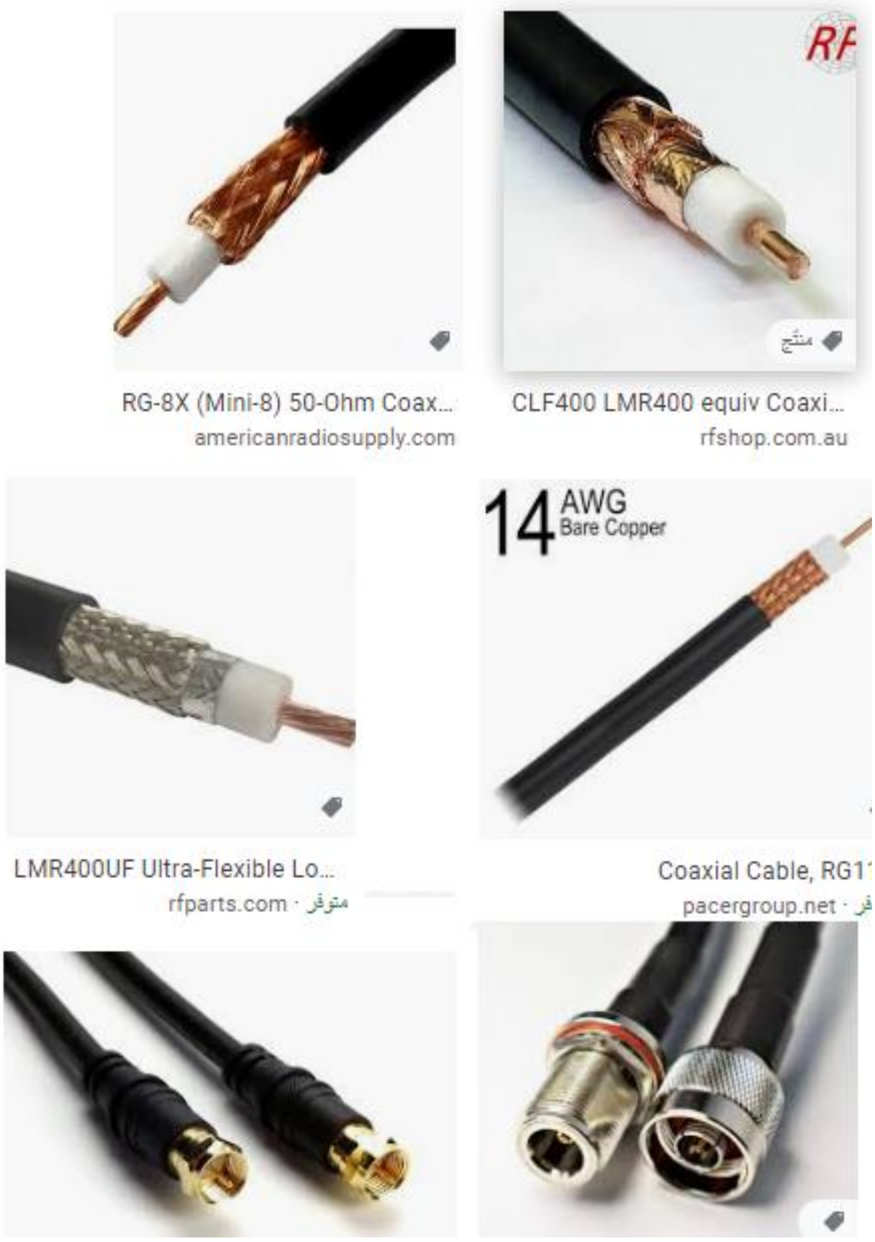
وبعد ايجاد

المجال المغناطيسي في كل منطقة بدلالة ρ وبعد الحصول على الحل لكل منطقة، يمكن رسم شدة المجال المغناطيسي كما في الشكل التالي:



Figure

The magnetic field intensity as a function of radius in an infinitely long coaxial transmission line with the dimensions shown.



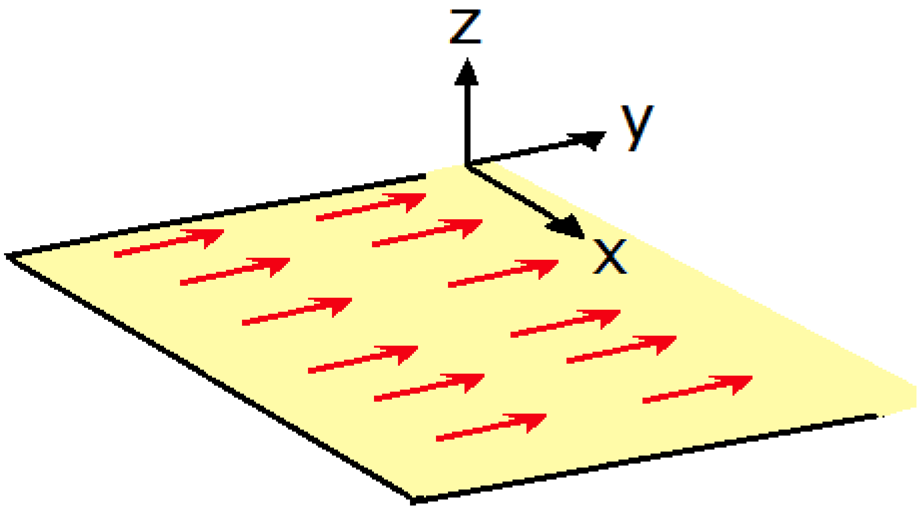
في الشكل أعلاه : صور مختلفة للقابلو المحوري coaxialcable

App. 3 The magnetic field intensity of a sheet of current

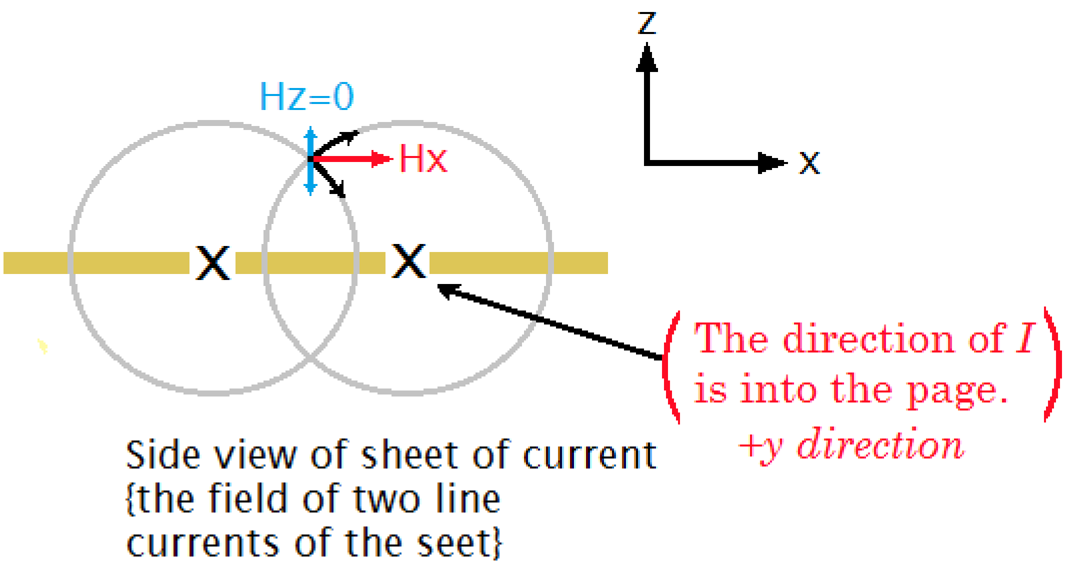
Consider a sheet of current flowing in +y direction located at z=0 plane.

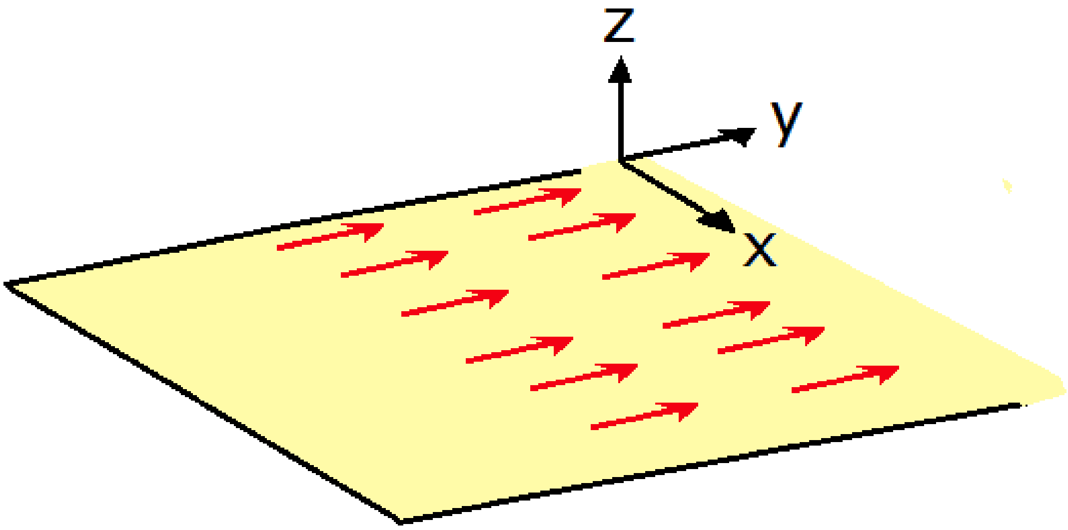
The sheet have a uniform current density **K**

$K=K_y\, a_y$

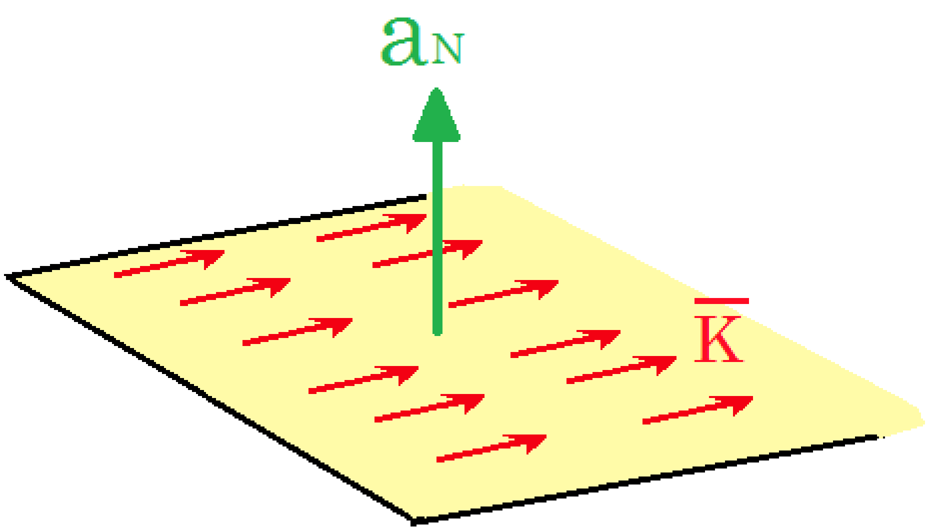


Sheet of current (the direction of current is in +y direction)




z
y
x

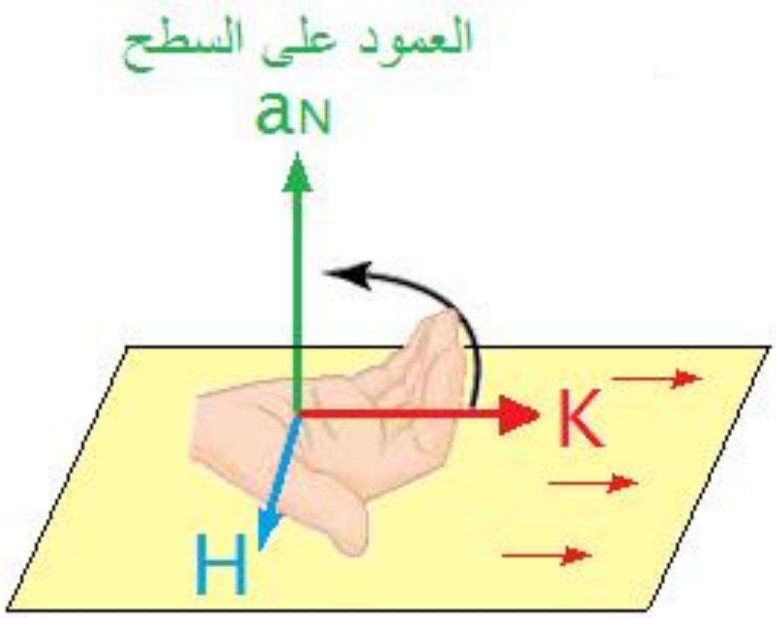
Let (**a**N) be a unit vector normal (outward) to the sheet as shown in figure below:



فلتسهيل ايجاد اتجاه المجال نستخدم الصيغة العامة التالية :

$$\boxed{H = \frac{1}{2} K \times aN}$$

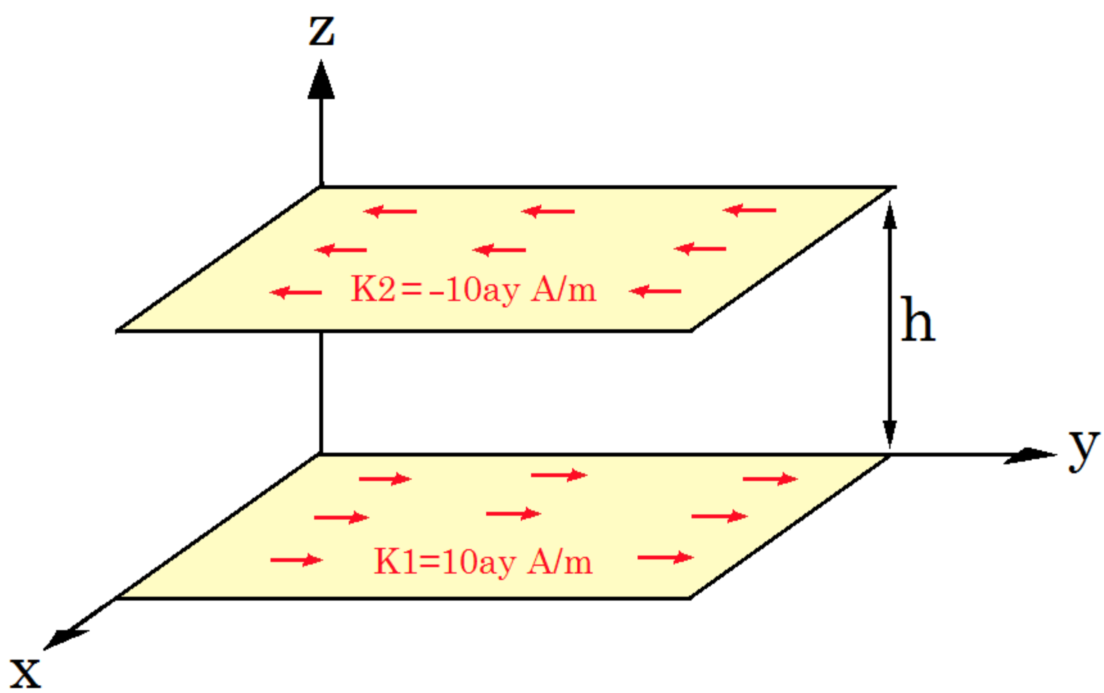
- يتم تدوير اصابع اليد اليمنى من اتجاه كثافة التيار K وتدور نحو العمود an فيشير الابهام نحو اتجاه المجال المغناطيسي كما في الشكل التالي:



والملاحظ من سريان التيار خلال سطح لانهائي , أن المجال المغناطيسي لا يتأثر ببعد المسافة عن السطح.

Exercise : Two infinite sheets of current, the first have asurface current density K=10 ay (A/m) at z=0 while the second have current density K= -10ay at z=h where h>0

Find the magnetic field intensity every where?

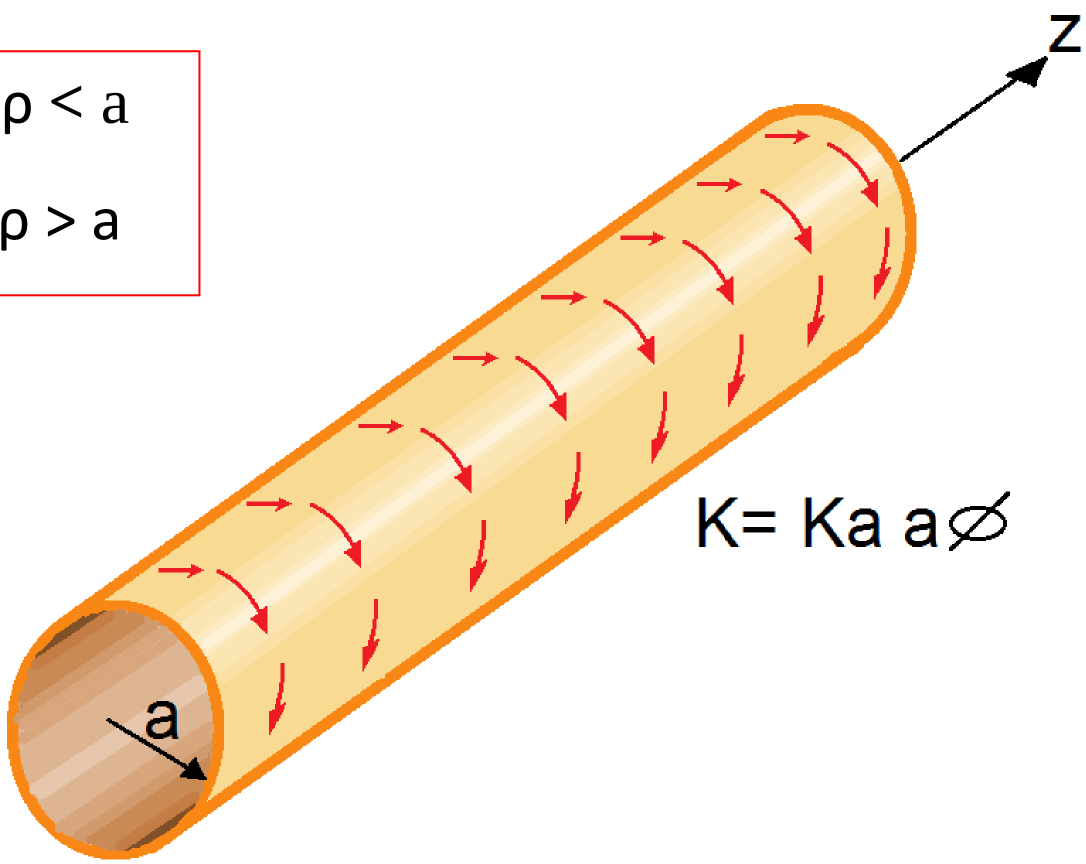


Solution:

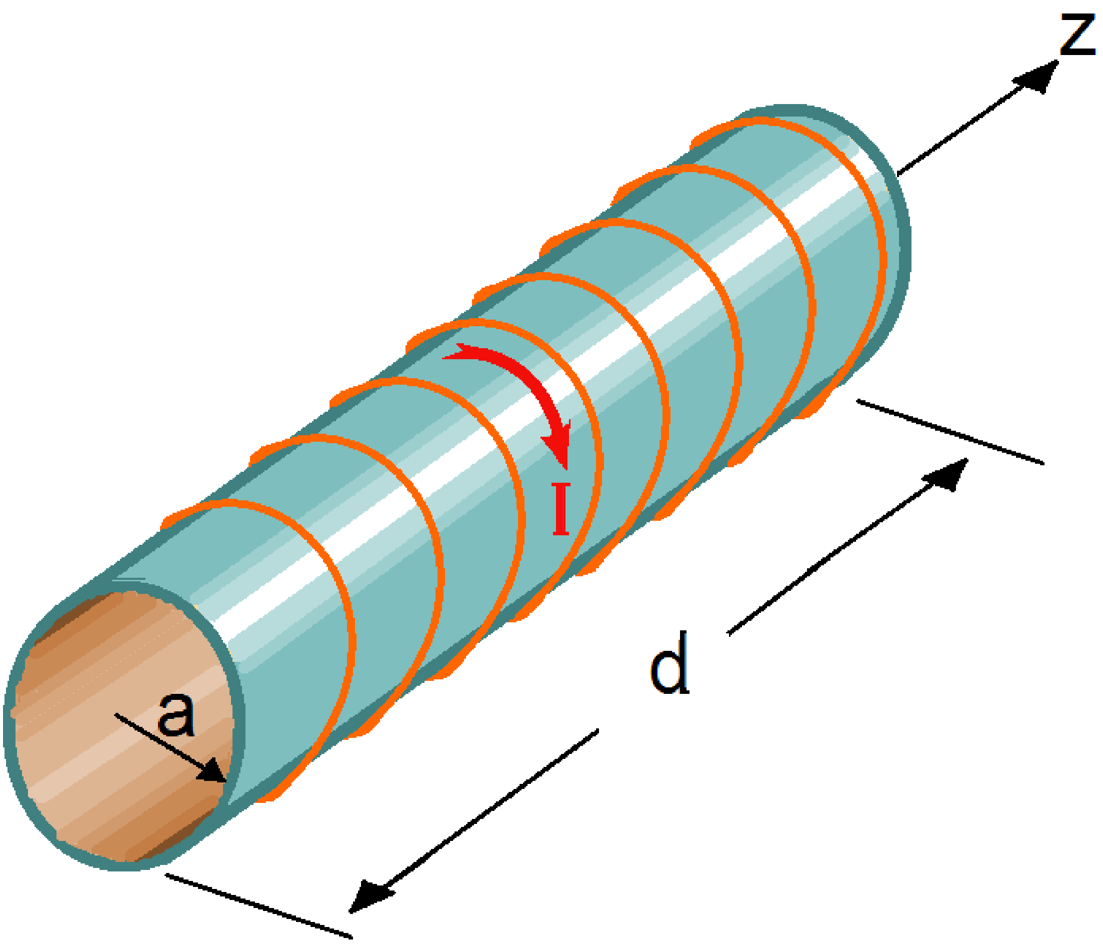
App. 4 :

- For infinitly long selonoid of radius (a)

H=Ka az	ρ < a
H=0	ρ > a



- For finit d long of N turns that carries a current I

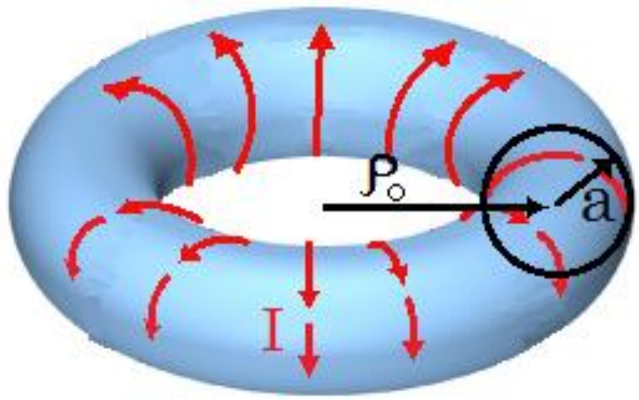


$$H = \frac{NI}{d} \ a_z$$

(within the selonoid)

H=0 ρ > a

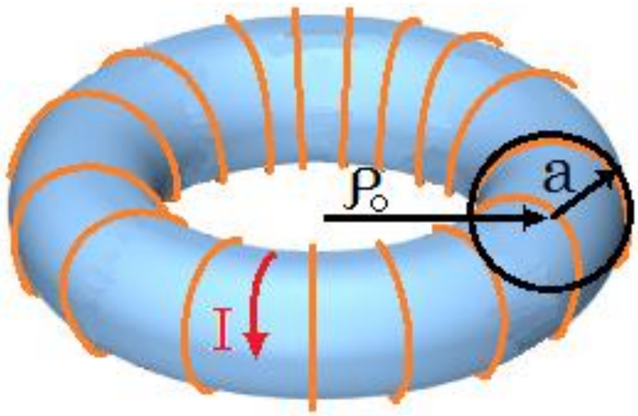
- For the toroids with radius ρ_o , a



$$\boxed{H = Ka\frac{\rho_{0}-a}{\rho}a\phi}$$ (inside the toroid)

H=0 (out side)

- For N turn toroid with radius ρ_o , a



$$\boxed{H = \frac{NI}{2\pi\rho}a\phi}$$ (inside the toroid)

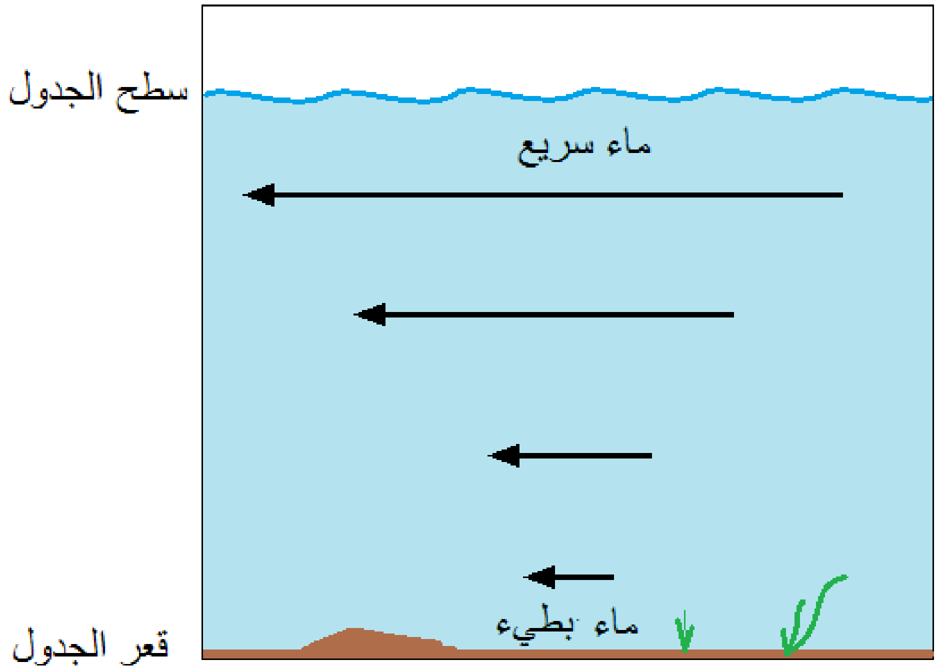
H=0 (out side)

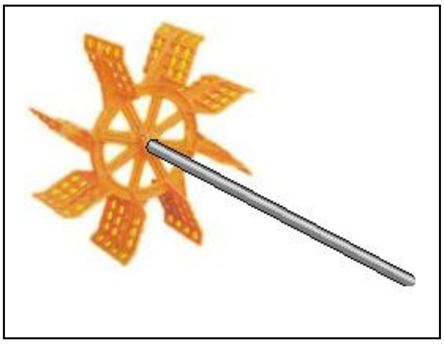
Curl

We may describe curl as circulation per unit area

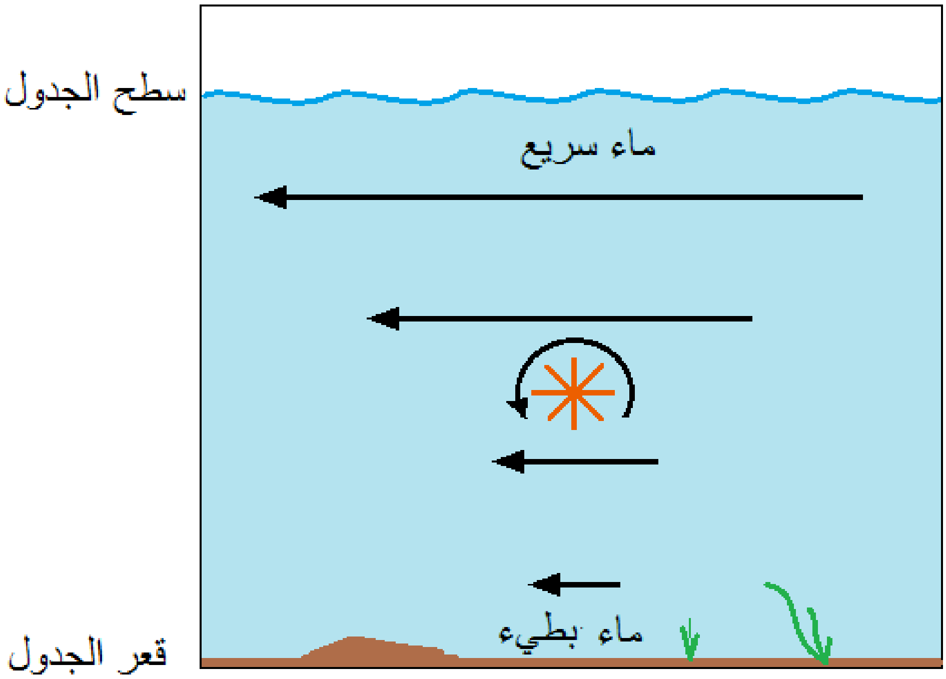
يمكن القول بان ال curl هو وصف لمدى البرم (الدوران أو الفتل) خلال وحدة المساحة.

ولتقريب الفكرة نضرب مثلا لجدول ماء أو ساقية تكون سرعة الماء فيها غير متساوية ففي العمق يكون الماء بطيئا بسبب العوائق الكثيرة بينما يكون الماء اسرع كلما ارتفعنا الى السطح انظر الشكل التالي. فلو اردنا مثلا قياس مدى البرم الجانبي , يمكننا استخدام اداة بسيطة كالدولاب ذو المحور المبين في الشكل المجاور





فلو اردنا مثلا قياس مدى البرم الجانبي , يمكننا استخدام اداة بسيطة كالدولاب ذو المحور المبين في الشكل المجاور ووضعه بشكل أفقي



سنلاحظ دوران الدولاب باتجاه عكس عقارب الساعة بسبب تفاوت السرع اعلا واسفل منه وهذا يدل الى وجود عامل دوران أو برم.

عامل ال curl يشبه عمل ذلك الدولاب حيث يستعمل في كشف وجود البرم أو الدوران في العوامل الفيزيائية كالتيار او المجال المغناطيسي.

The mathematical form of the definition is :

$$\boxed{(\mathrm{Curl\ H})_N = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint H \cdot dl}{\Delta s_N}} \quad (aline\ integral\ per\ unit\ area)$$

$$Curl\ H = \nabla \times H = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Hx & Hy & Hz \end{vmatrix} (\mathrm{Cartesian})$$

$$Curl\ H = \nabla \times H = \begin{vmatrix} \frac{a\rho}{\rho} & a\emptyset & \frac{az}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\emptyset} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H\rho & \rho H\emptyset & Hz \end{vmatrix} \text{(cylindrical)}$$

$$curl\ H = \nabla \times H = \begin{vmatrix} \frac{ar}{r^2 sin\theta} & \frac{a\theta}{rsin\theta} & \frac{a\emptyset}{r} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\emptyset} \\ Hr & rH\theta & rsin\theta H\emptyset \end{vmatrix} \text{(spherical)}$$

From the definition: $(\text{curl H})_N = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint H \cdot dl}{\Delta s_n}$

$\oint H \cdot dl = I$ (amper circutal law); $\frac{\text{I}}{\text{Area}} = \text{J}$

$\therefore$ $\boxed{\nabla \times \text{H} = \text{J}}$ *the point form of amper circutal law*

This is the second of Maxwell's four equations (non time varing conditions).

the point form of $\oint E \cdot dl = 0$ is:

$$\boxed{\nabla \times E = 0}$$

This is the therd of Maxwell's four equations

Two properties of Curl may be useful:

: Curl الخاصيتات الهامتان لل

1- thr divergence of a Curl is the zero scalar

$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ (for any vector field A)

2- the Curl of gradient is the zero vector

$$\nabla \times (\nabla A) = 0$$

المثال التالي معد للحل في المحاضرات الالكترونية (وتم حله في المحاضرات الحضورية)

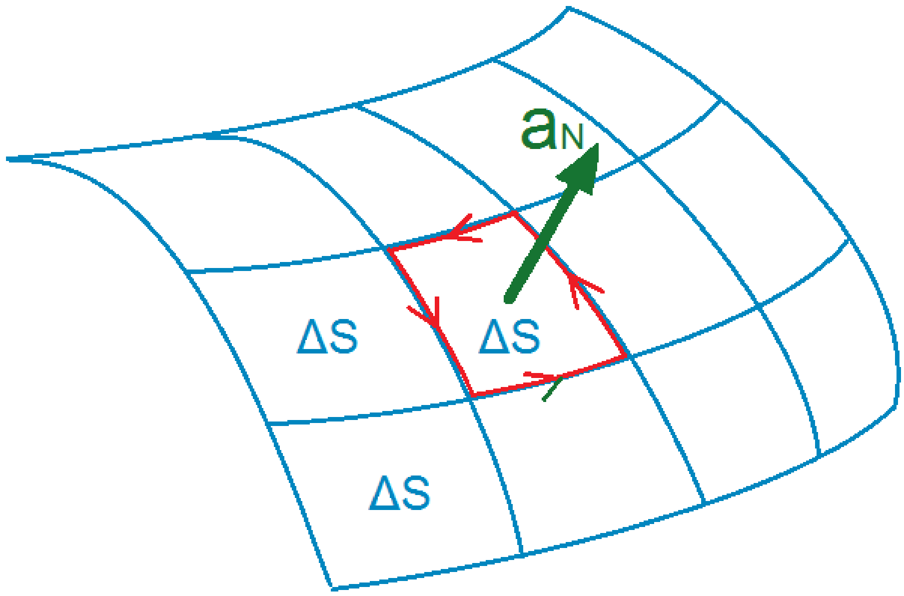
Example: Suppose $\mathbf{H} = 0.2Z^2\mathbf{ax}$ for Z > 0

$\mathbf{H} = 0$ else where,

Find curl **H** at $(0,0,Z_1)$.

Exercise: a long straight conductor cross section with radius a has a magnetic field strength $H = \frac{I\rho}{2\pi a^2} a\emptyset$ within the conductor $\rho < a$, and $H = \frac{I}{2\pi\rho} a\emptyset$ at $\rho > a$, find J in both regions?

Stokes Theorem



هذه النظرية تربط بين التكامل السطحي على مساحة معينة مثلا ΔS مع التكامل على مسار مغلق يحيط بتلك المساحة ΔS انظر الشكل أعلاه

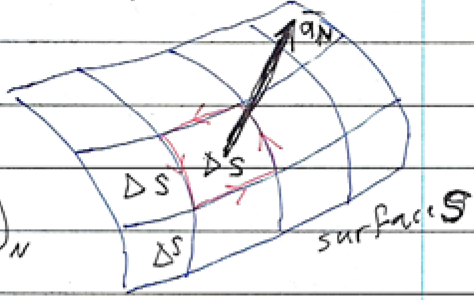
$$\oint H \cdot dL = \int_{s} (\nabla \times H) \cdot ds$$

واليك الصورة لصفحة المحاضرات الخاصة بهذه النظرية:

STOKES' THEOREM p 202

we are prepered to obtain the integral form (Ampere's circuital law) from the point form

$$\nabla \times H = J$$



$$\frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}_{\Delta S}}{\Delta S} = (\nabla \times \bar{H})_N$$

where the N subscript indicate the right hand normal to the surface.

$d\bar{L}_{\Delta S}$: indicate that the closed path is the perimeter of an incremental area ΔS

$$\frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}_{\Delta S}}{\Delta S} = (\nabla \times \bar{H}) \cdot \bar{a}_N$$

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}_{\Delta S} = (\nabla \times \bar{H}) \cdot \bar{a}_N \Delta S = (\nabla \times H) \cdot \Delta S$$

$$\boxed{\oint H \cdot d\bar{L} \equiv \int_c (\nabla \times \bar{H}) \cdot d\bar{s}}$$ stokes theorem

where $d\bar{L}$ is taken only on the perimeter of S.

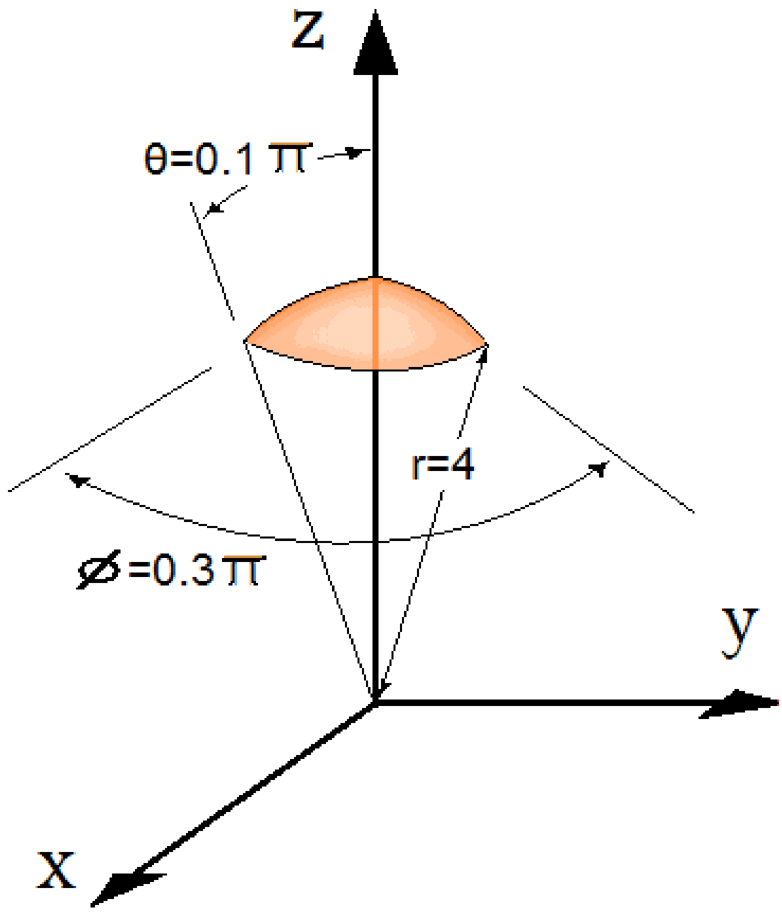
* it relates the surface integral to a closed line integral

المثال التالي معد للحل في المحاضرات الالكترونية (وتم حله في المحاضرات الحضورية)

Example: consider the portion of a sphere shown in figure below. The surface is specified by: r=4 $0 \le \theta \le 0.1\pi$; $0 \le \phi \le 0.3\pi$. If the field **H:**

$H = 6r \sin\phi \, a_r + 18r \sin\theta \cos\phi \, a_\phi$, Evaluate each side of Stok's theorem?

الحل موجود في المحاضرات:



Q) from $\nabla \times H = J$ obtain Ampers circuital law?

Magnetic flux and Magnetic flux Density

الفيض المغناطيسي وكثافة الفيض المغناطيسي

- Magnetic flux **ϕ** (wb)   wb: (weber)
- Magnetic flux density **B** (Wb/m^2) or tesla(T)

The constant $\mu 0$ is *defined as the permeability* of free space in henrys per meter (H/m): $\boldsymbol{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}}$ **H/m**

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (free space only)

The magnetic flux ϕ (weber): is the flux passing through any designated area

$$\phi = \int_s \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{ds} \qquad (Wb)$$

Note: The magnetic flux lines are closed and do not terminate on a magnetic charge. For this reason Gauss's law for the magnetic field is:

$$\oint_s \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds} = 0$$

And by application of the divergence theorem:

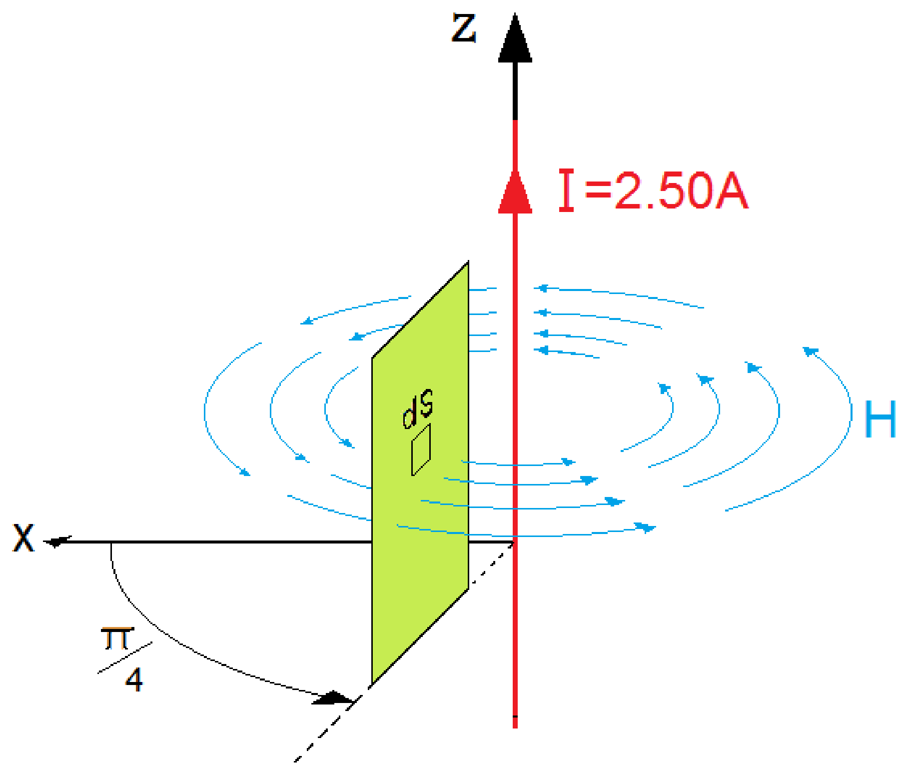
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

المثال التالي معد للحل في المحاضرات الالكترونية (وتم حله في المحاضرات الحضورية)

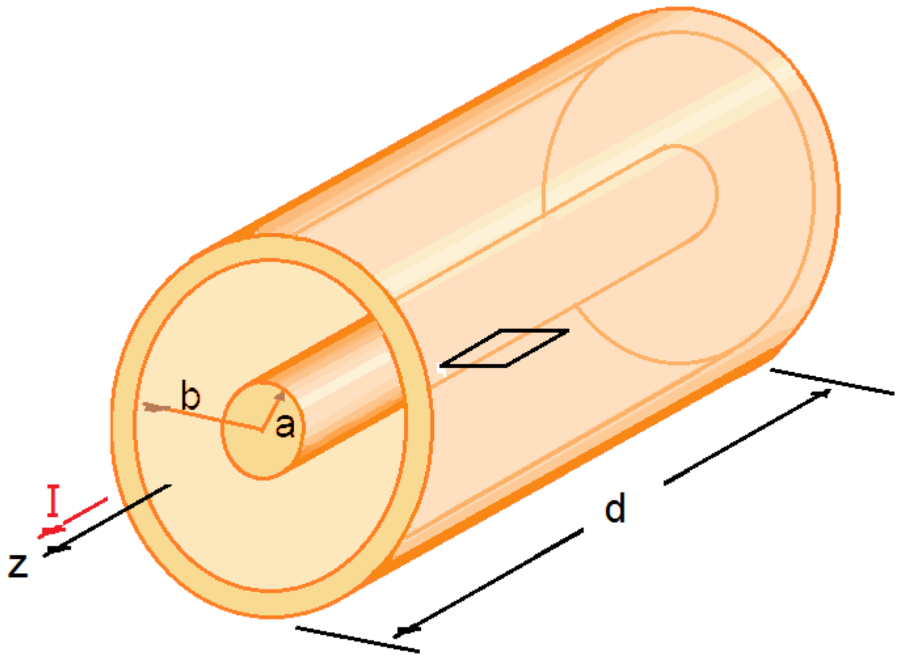
Example: find the flux crossing the portion of the plane shown in figure below defined by :(0.01< ρ <0.05)m

and 0 < z < 2 m. Acurrent filament of 2.5A along the z axis is in the az direction?

Solution:



Exercise : find the magnetic flux between the conductors of the coaxial line :



Exercise**:** (الملزمة ص111) Asolid conductor of circular cross section, if the radius a=1mm, the conductor axis lies on the z axis, and the total current in the az direction is 20A, find:

(a) H_ϕ at ρ=0.5mm;

(b) B_ϕ at ρ=0.8mm;

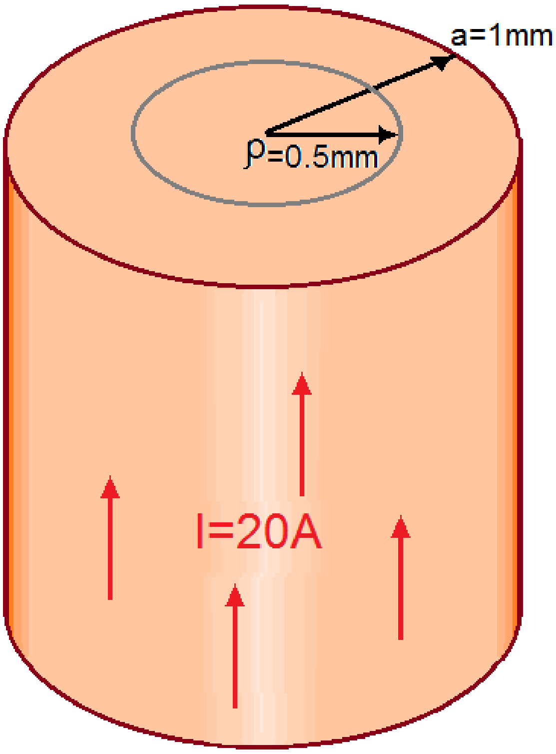
(c) Total magnentic flux per unit length inside the conductor;

(d) total flux for ρ< 0.5mm;

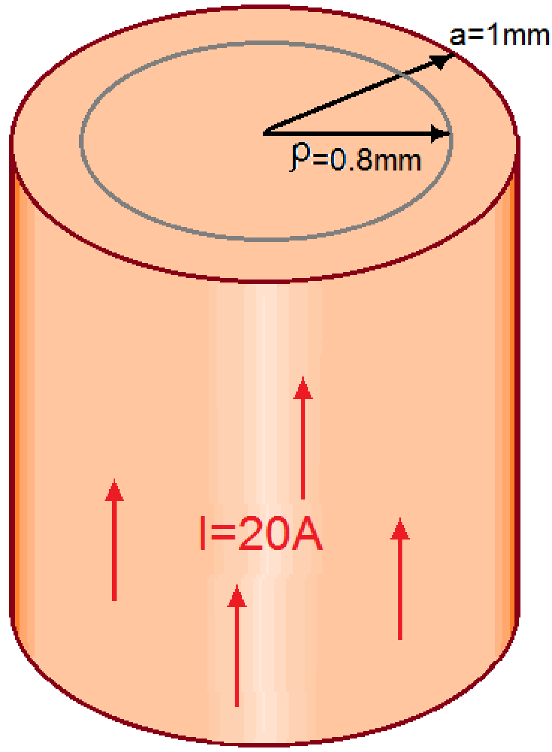
(e) total magnetic flux outsid the conductor?

Solution:

(a) H_ϕ at ρ=0.5mm;



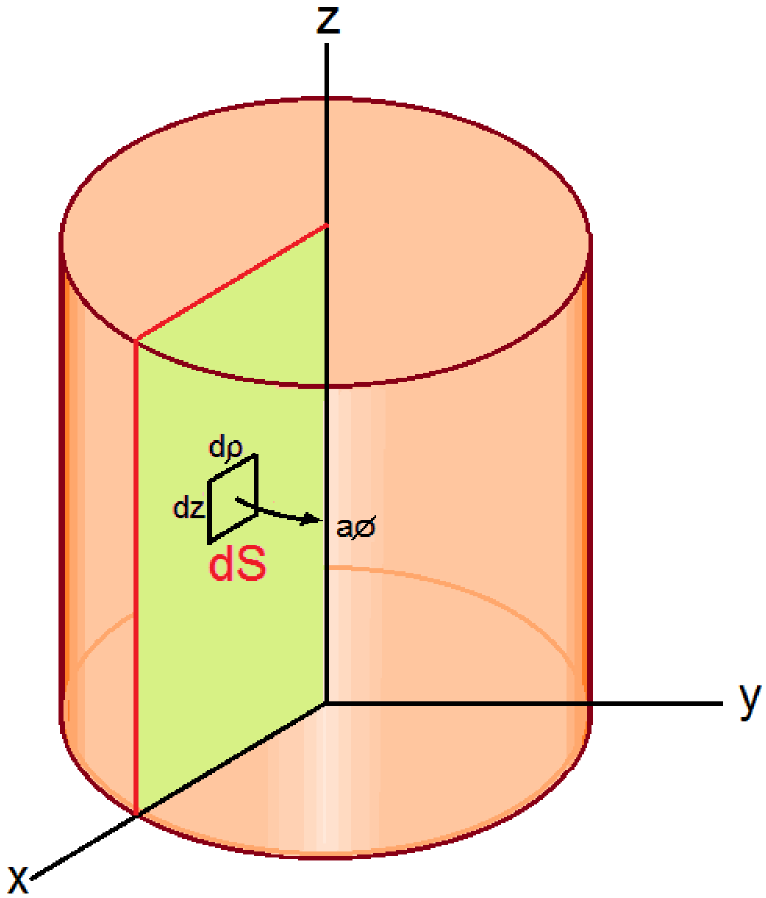
(b) B_ϕ at ρ=0.8mm;



a=1mm
ρ=0.8mm
I=20A

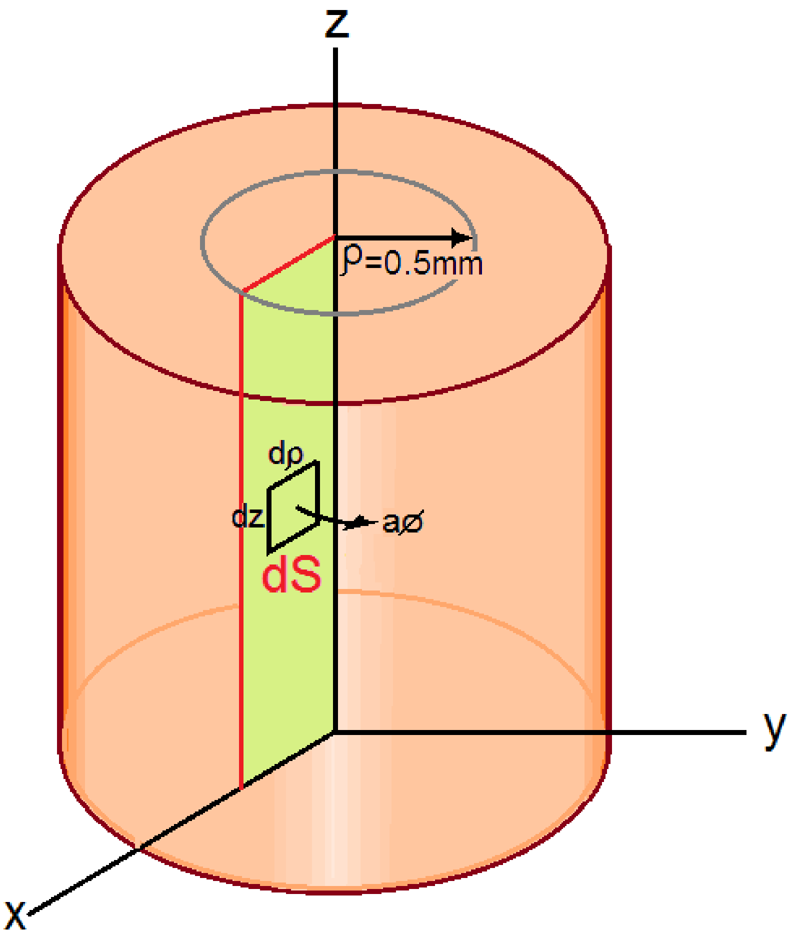
(c) Total magnentic flux per unit length inside the conductor.

نستخرج الفيض من خلال حساب كل خطوط الفيض التي تخترق مستوي يعترضها جميعها (لاحظ المنطقة الخضراء).



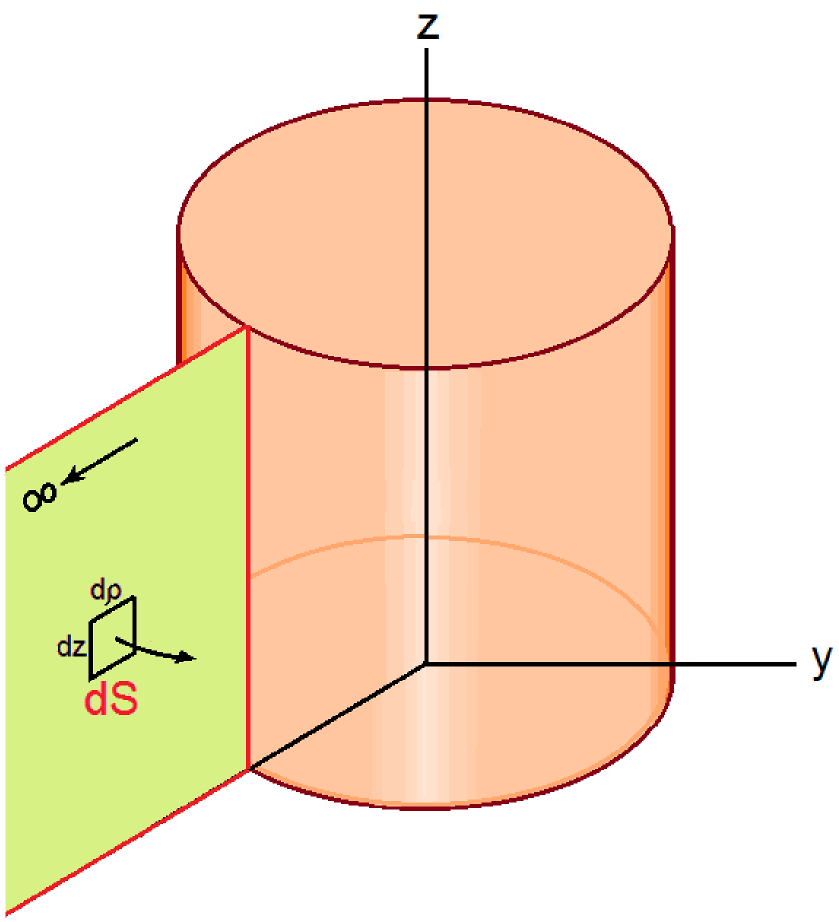
(d) total flux for $\rho < 0.5mm$;

بنفس الطريقة نفرض المستوي باللون الاخضر ليعترض كل خطوط الفيض في المنطقة المحددة $\rho < 0.5mm$



(e) total magnetic flux outsid the conducto?

بنفس الطريقة نفرض المستوي باللون الاخضر ليعترض كل خطوط الفيض في المنطقة المحددة $\rho > 1mm$



Scalar Magnetic Potential and Vector Magnetic Potential

1) Scalar Magnetic Potential: Vm (A)

لو تساءلنا، هل يوجد جهد مغناطيسي؟ كما في حالة الجهد الكهربائي؟

نحن نعلم ان الجهد الكهربائي وهو كمية غير اتجاهية أي Scalar يقاس بالفولت والعلاقة التي تربطه بالمجال الكهربائي هي $E = -\nabla V$.

هنا سنقول ان الجهد المغناطيسي (Vm) ايضا كمية غير اتجاهية (لمشابهة الجهد الكهربائي) والعلاقة هي:

$$H = -\nabla Vm$$

والاشارة السالبة وضعت لمشابهة الجهد الكهربائي ايضا، لكن هل يصح هذا ؟ فلو اخذنا Curl لكلا طرفي المعادلة السابقة : $\nabla \times H = \nabla \times (-\nabla Vm)$ أي ان $\mathrm{J} = \nabla \times (-\nabla Vm)$

هنا حصلت مشكلة ، حيث ان أخذ Curl لل Gradiant تكون نتيجته صفر (وهذه احدى خاصيتي ال Curl) أي $\mathrm{J} = \nabla \times (-\nabla Vm) = 0$ بينما لا يشترط ان تكون كثافة التيار J مساوية للصفر.

وللخروج من هذا المأزق تقرر ان لا تطبق المعادلة الا في حالة كون كثافة التيار مساوية للصفر.

أي ان : $H = -\nabla Vm$ صحيحة فقط عندما J=0

ويجدر الاشارة ان الجهد المغناطيسي الغير اتجاهي Vm ايضا يحقق معادلة لابلاس:

$$\nabla \cdot B = \mu_{\circ} \nabla \cdot H = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{\circ} \nabla \cdot (-\nabla Vm) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2\, Vm = 0 \quad if\ J = 0$$

2) Vector Magnetic Potential: A (Wb/m)

This vector field is one which is extreamely useful is studying radiation from antennas as well as radiation leakage from transmission lines, waveguides and microwave ovens.

The vector magnetic potential may be used in regions where the current density is zero or not.

- نحن نعلم ان من خواص ال Curl ان : (Divrgence of (Curl of any vector) =0)

وطالما ان $\nabla \cdot B = 0$

ومن خلال تأمل المعادلة اعلاه نقول لماذا كانت نتيجتها مساوية للصفر؟ فلو قلنا ان B اصلا هو نتيجة عملية Curl لمتجه معين لكان التفكير سليما. فمثلا لو قلنا ان : $B = \nabla \times A$ لكان $\nabla \cdot B = 0$ مفهوما لان

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

وبذلك يكون المتجه A هو الجهد المغناطيسي الاتجاهي Vector magnetic potential وهو قيمة اتجاهية ووحدته **A** : (web/m)

إذن $B = \nabla \times A$

وطالما ان B = μH اي ان H = B /μ

$$H = \frac{1}{\mu}(\nabla \times A) = \nabla \times H = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \nabla \times A) = J$$

For differential current element $\boxed{A = \oint \frac{\mu I dL}{4\pi R}}$

For sheet current $\boxed{A = \int_S \frac{\mu K dS}{4\pi R}}$

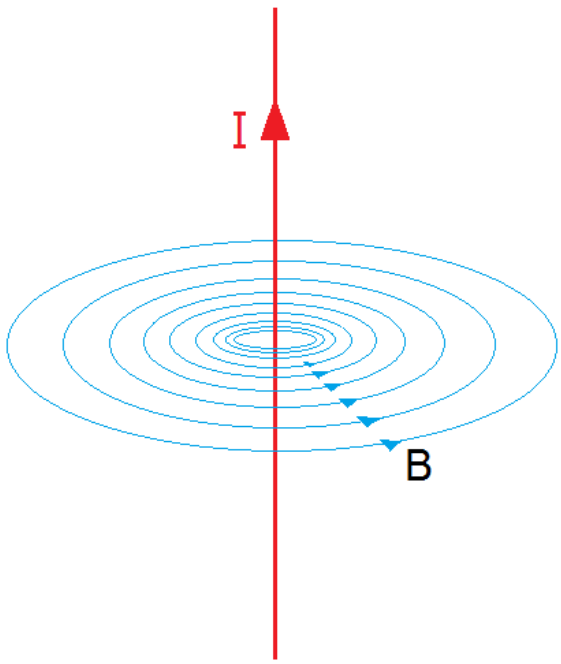
For volume current $\quad A = \int_v \frac{\mu \boldsymbol{J} dv}{4\pi R}$

R: the distance from the current element to the point at which the vector magnetic potential is being calculated.

بعض الامثلة عن ال vector magnetic potential المحلولة في المحاضرات، سنطرحها هنا على شكل تمارين للطالب ثم يمكنه مراجعة الحل.

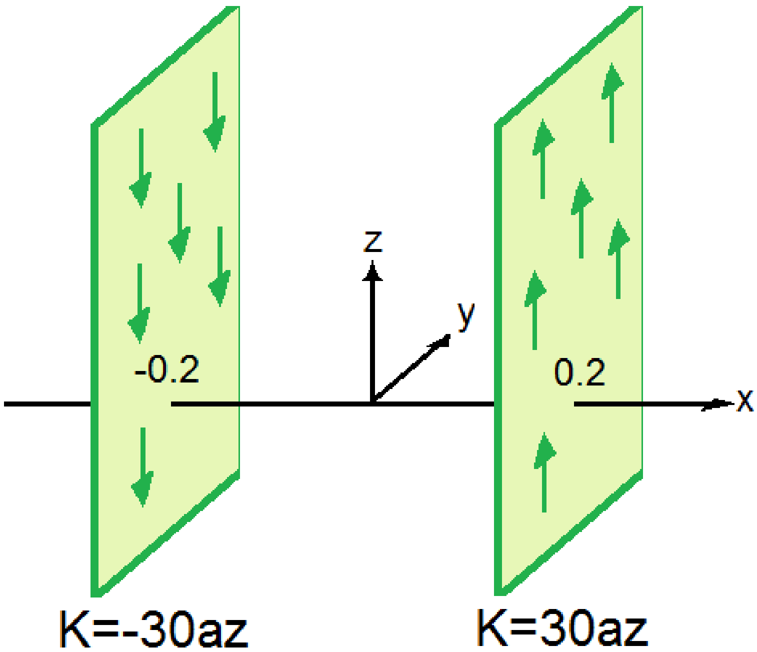
Exercise: Obtain the vector magnetic potential A in the region surrounding an infinitely long atraight filamentary current?

Solution:



Exercise: planar current sheets of K=30az A/m and -30az A/m are located in free space at x=0.2 and x=-0,2 respectively. For the region -0.2<x<0.2 a) find H; b)find B; c) obtain an expression for A if A=0 at point (0.1, 0.5, 0.4) ?

Solution:



Exercise: Let the vector magnetic potential in free space

$$A=(3y-z)\,a_x + 2xz\,a_y \quad wb/m \quad .$$

a) Show that $\nabla . A=0$

b) At p(2, -1, 3) find A , B , H and J ?

Solution: