جامعة تكريت
كلية الهندسة
قسم الهندسة الكهربائية
المرحلة الثانية
المجالات الكهرومغناطيسية
م.م. قيس خليل شاكر
2019-2020

Electromagnetic Fields

CH 5

Conductors and dielectrics

Conductors and Dielectrics

5.1 Current and current density

Current: A rate of movement of positive charges crossing a given reference plan.

The unit of current is Ampere (A)

$$1A = \frac{1C}{sec}$$

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \quad ----- (1)$$

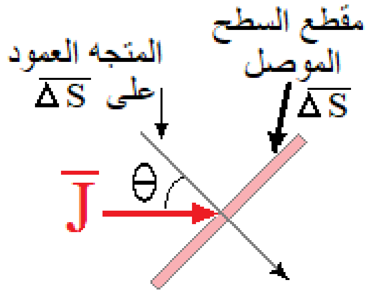
$\bar{J}$: is a current density measured in $\left(\frac{A}{m^2}\right)$

يمثل J كثافة التيار أي أنه يمثل قيمة التيار مقسوم على مساحة المقطع الذي يمر فيه التيار

$$\Delta I = J_N \, \Delta S \quad (\Delta S \text{ is normal to current density})$$

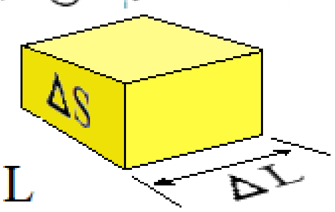
in the case where current density is not perpendicular to the surface: $\Delta I = \bar{J} \cdot \overline{\Delta S}$

$$\boxed{I = \int_S \bar{J} \cdot \overline{dS}} \quad (2)$$

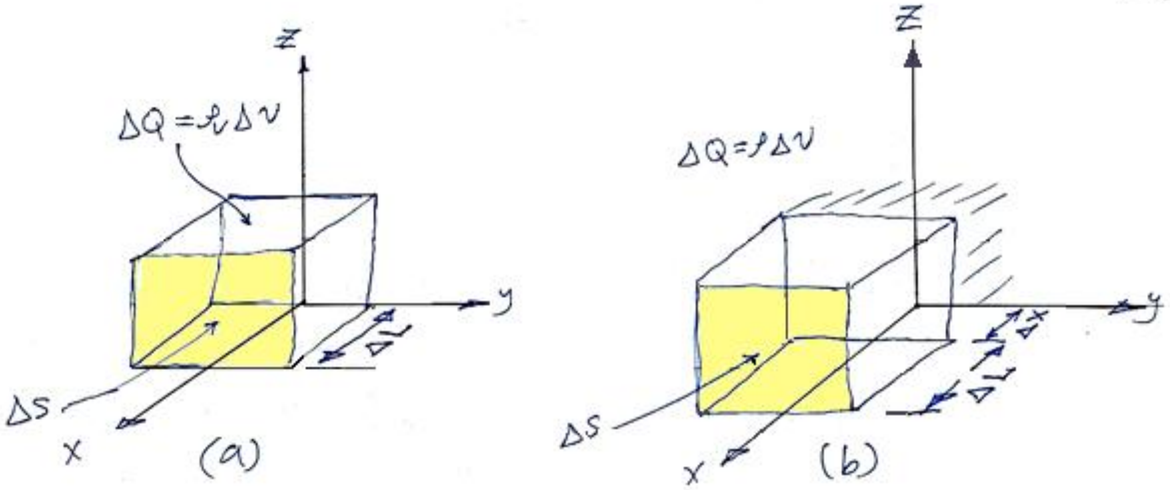


Related to the velocity of volume charge density at a point: $\Delta Q = \rho_v \, \Delta V = \rho_v \, \Delta S \, \Delta L$

volume



$\Delta V = \Delta S \; \Delta L$



assume that the charge element as shown in figure (b) has only x component of velocity in the time interval Δt. the elemen charge has moved a distance ΔX

$$\Delta Q = \rho_v \,\Delta S\, \Delta X \quad \text{moved in time } \Delta t$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \,\Delta S \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

take the limit w.R.T. time :

$$\Delta I = \rho_v \,\Delta S\, V_x$$

where V_x = x component of the velocity.

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = J$$

in term of current density: $J_x = \rho_v V_x$

$$\boxed{\bar{J} = \rho_v \bar{V}} \quad \text{......} \quad (3)$$

velocity vector

I: is called convection current.
J: " " " " density.

D 5.1 p:111

Given the vector current density $J = 10\rho^2 z\,\overline{a_\rho} - 4\rho\cos^2\phi\,\overline{a_\phi}$ mA/m^2

a) find the current density at $P(\rho=3, \phi=30^\circ, z=2)$.

b) determine the total current flowing outward through the circular band $\rho=3$, $0<\phi<2\pi$, $2<z<2.8$

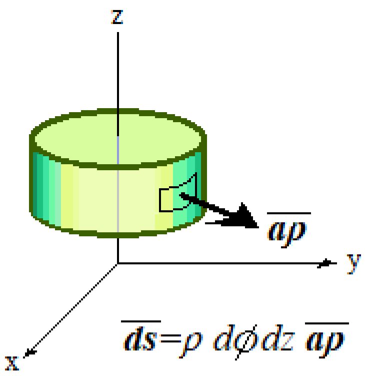
Solution:

a) $J = \left(10(3^2)*2\ \overline{a_\rho} - 4*3*\cos^2 30\ a_\phi\right)\times10^{-3}$

$= 180\ \overline{a_\rho} - 9\,a_\phi$ mA/m^2

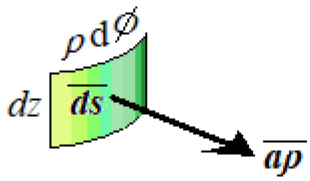
b) The circular band is shown in figure below

$$I = \int_s \overline{J}.\overline{ds}$$



$$\overline{ds} = \rho d\varnothing\ dz\ \overline{a_\rho}$$

$$I = \left[\int_{z=2}^{2.8}\int_{\phi=0}^{2\pi} 10\rho^3 z\ d\phi\, dz\right]\times10^{-3}$$



$$I = \left[10(3^3)*2\pi\int_{z=2}^{2.8} z\ dz\right]\times10^{-3}$$

$$= \left[270*\cancel{2}\pi\left(\frac{z^2}{\cancel{2}}\right)_2^{2.8}\right]\times10^{-3}$$

$= 3.257$ A

Contiuity of Current استمرارية التيار

قانون حفظ الشحنة

Conservation of charge: The charges can be neither created nor destroyed.

* equal amounts of positive and negative charge may be simultaneously created, obtained by separation or lost by recombination.

The current through the closed surface is

$$I = \oint_s \bar{J} \cdot \bar{ds}$$

معدل تناقص الشحنة داخل السطح المغلق

التيار الخارج من السطح المغلق

$$I = \oint_s \bar{J} \cdot \bar{ds} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{-------} \quad (4)$$

الصيغة التكاملية لمعادلة الاستمرارية

by using the divergence theorem to change the surface integral to volume integral: لاحظ معادلة 17 في الفصل الثالث P: 68

$$\oint_s \bar{J} \cdot \bar{ds} = \int_{vol} (\nabla \cdot \bar{J}) \, dv$$

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \bar{J}) \, dv = -\frac{d}{dt} \int_{vol} \rho_v \, dv$$

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \bar{J}) \, dv = \int_{vol} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

الصيغة النقطية لمعادلة الاستمرارية

$$\boxed{(\nabla \cdot \bar{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad \text{........} \quad (5)$$

Point form of continuity eq.

ملاحظة:

حسب المعنى الفيزيائي لل divergence فان الصيغة النقطية للاستمرارية تدل على أن $\text{div}\,\frac{Q}{t}$ من $\frac{dv}{\text{وحدة الحجم}}$ (لحجم صغير) مساوية الى المعدل الزمني لتناقص الشحنات نسبة الى وحدة الحجم في كل نقطة.

Example: Let us consider $\overline{\mathbf{J}}$ directed radially outward from a sphere of radius (r) and decreases exponentially with time:

$$\overline{J} = \frac{1}{r} e^{-t}\ \overline{a_r}\ \ A/m^2$$

Find the total current outword at r =5m , 6m and at t=1s?

Solution:

at $t = 1$ sec

the total outward current at $r = 5$ m (محيط الكرة)

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{5} e^{-1}\right)\left(4\pi\, 5^2\right) = 23.1\,A$$

for $r = 6$ m

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{6} e^{-1}\right)\left(4\pi\, 6^2\right) = 27.7\,A$$

the total current at $r = 6$m is larger than that at $r = 5$m

لاستنتاج علاقة السرعة مع كثافة الشحنة الحجمية

by use of continuity eq.

$$\boxed{-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla\cdot\overline{J}} = \nabla\cdot\left(\frac{1}{r} e^{-t}\,\overline{a_r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r} e^{-t}\right) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

$$\rho_v = -\int \frac{1}{r^2} e^{-t}\, dt + K(r) = \frac{1}{r^2} e^{-t} + K(r)$$

if we assume that $\rho_v \to 0$ as $t \to \infty$ then $K(r) = 0$; $e^{-\infty} = 0$

$$\rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t}\ \ C/m^3$$ للزمن الطويل

to find the velocity we may use $\overline{J} = \rho_v \overline{V}$ (سرعة)

$$v_r = \frac{J_r}{\rho_v} = \frac{\frac{1}{r} e^{-t}}{\frac{1}{r^2} e^{-t}} = r\ \ m/s$$

أي ان السرعة تزداد مع زيادة r

في هذا المثال:

الخلاصة

$J \propto \frac{1}{r}$

$\rho_v \propto \frac{1}{r^2}$

$v \propto r$

$I \propto r$

D 5.2 p:113 Current density is given in cylinderical coordinate as $\bar{J} = -10^{6} z^{1.5} \bar{a_z}$ A/m² in $0 \leq \rho \leq 20\mu m$

for $\rho \geq 20\mu m$, $J = 0$

a) Find the total current crossing the surface $z = 0.1$ m in $\bar{a_z}$ direction.

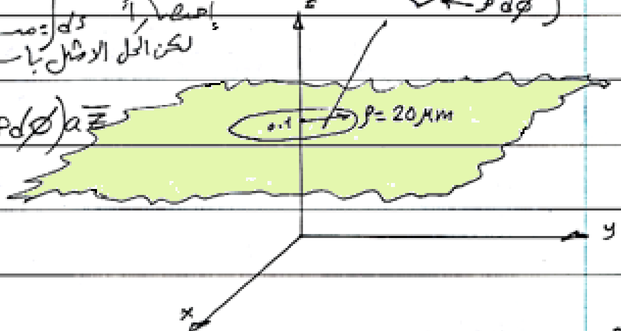
b) If the charge velocity is 2×10^{6} m/s at $z = 0.1$ m find ρ_v there.

c) If the volume charge density at $z = 0.15$ m is -2000 C/m³ find the charge velocity there.

Solution:

$$ds = \rho\, d\rho\, d\phi\, \bar{a_z}$$

إعتماداً أن $\int ds$ = مساحة دائرة $= \pi r^2$
يمكن الحل الأمثل باستخراج ذلك :



a) $I = \int_s J \cdot ds$; $ds = (\rho\, d\rho\, d\phi)\bar{a_z}$

$$I = \bar{J} \cdot \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=20\mu m} \rho\, d\rho\, d\phi\ \bar{a_z} \right]$$

$$I = \bar{J} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \right)_0^{20\times10^{-6}} d\phi\ \bar{a_z} \right) = \bar{J} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}} (20\times10^{-6})^2 * \cancel{2}\pi \bar{a_z} \right) = J \cdot \left(\pi * (20\times10^{-6})^2 \bar{a_z} \right)$$

$$I = \left[-10^{6} * (0.1)^{1.5} \cancel{\bar{a_z}} \right] \cdot \left[\pi * (20\times10^{-6})^2 \cancel{\bar{a_z}} \right] = -39.7 \mu A$$

b) at $z = 0.1$ m $\qquad J = -10^{+6}(0.1)^{1.5} = -0.0316\times10^{+6}$ A/m²

$$\rho_v = \frac{J}{v} = \frac{-0.0316\times\cancel{10^{+6}}}{2\times\cancel{10^{6}}} = -0.0158\ \text{C/m}^3 \text{ or } -15.8 \text{ mC/m}$$

c) at $z = 0.15$ m $\qquad \rho_v = -2000$ C/m²

$$v = \frac{J}{\rho_v} = \frac{-10^{6}(0.15)^{1.5}}{-2\times10^{3}} = 0.5\times10^{3}(0.15)^{1.5} = 29\ \text{m/s}$$

5.3 METALLIC CONDUCTORS

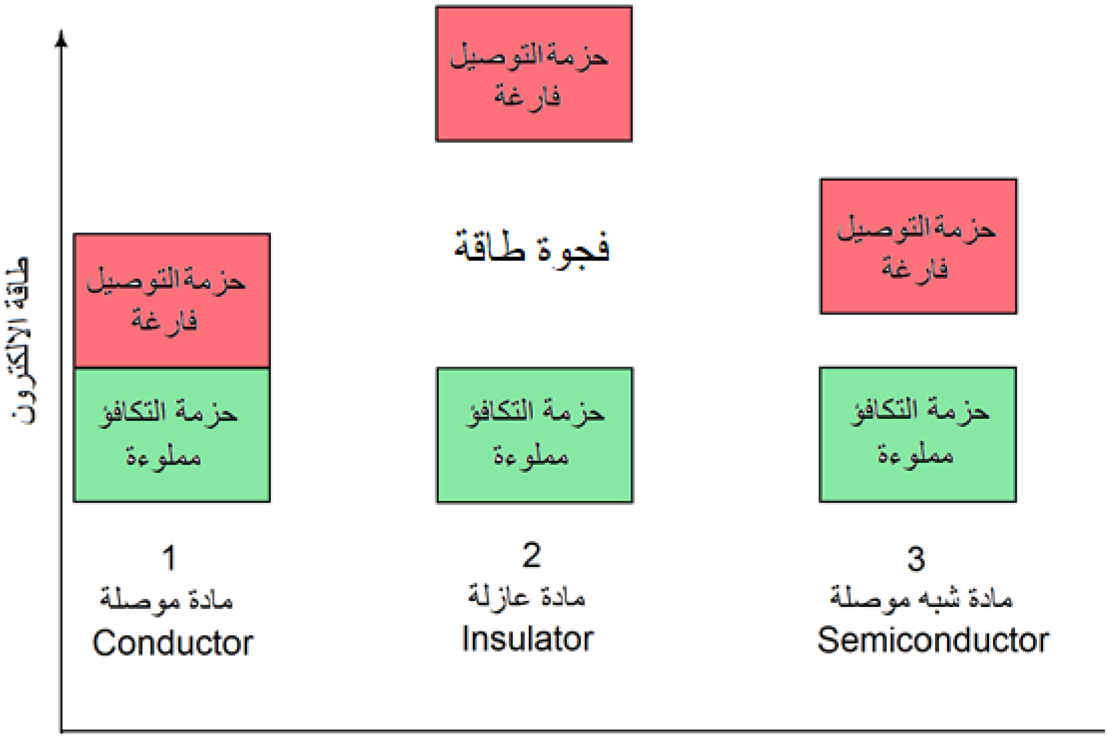
الفيزياء تصف لنا سلوك الالكترونات المحيطة بالنواة الموجبة . وإذا تكلمنا بدلالة مستوى طاقة الالكترون (نسبة الى مستوى الصفر ، فرضياً يكون هذا المستوى الصفري لدى الكترون بعيد جداً عن النواة) فإن طاقة الالكترون تكون نتيجة جمع نوعين من الطاقة :

الطاقة الكلية = الطاقة الكامنة + طاقة الجهد
potential energy   Kinetic energy

- طاقة الالكترون سنعتبرها سالبة (طالما ان الالكترون يحتاج الى طاقة خارجية للإفلات من النواة) ، والطاقة الاكثر سالبية تكون لدى الالكترونات الاقرب الى النواة في مداراتها .
- وحسب نظرية الكم فان الالكترون يكتسب أو يشع كمية محدد من الطاقة كي ينتقل من مستوى طاقة الى آخر ، أي على شكل طفرات .
- بالنسبة للذرة الاعتيادية ، وعند حرارة الصفر المطلق ، فان جميع الالكترونات تشغل جميع المستويات القريبة (الاغلفة القريبة من النواة) وتبدأ جميعها بالتحرر من النواة تدريجياً .
- في بلورات المواد الصلبة كالمعادن ، فان الذرات تكون متقاربة ومتزاحمة وهنالك الكثير من الالكترونات وايضاً وجدان هنالك الكثير من مستويات الطاقة المتاحة ، فلو قسمنا هذه المستويات الى مجاميع أو (حزم bands) وكل حزمة تحوي على عدد كثير ومتقارب من مستويات الطاقة .
- الالكترونات ذات الطاقة الاكبر (أي الاقل سالبية) تسمى الكترونات التكافؤ وتوضع ضمن حزمة التكافؤ (Valence band) .

وعندما تكون هنالك مستويات عالية في حزمة التكافؤ فانها قد تصل الى حزمة التوصيل حيث تلتقي الحزمتين تقريباً وتتداخل وعندئذ، فان اعطاء طاقة معينة الى الكترونات التكافؤ من مصدر خارجي سيسبب جريان تيار . وتدعى هذه المادة بالمادة الموصلة .

أما اذا كانت الفجوة بين حزمتي الطاقة كبيرة فان الكترون التكافؤ
لا يتقبل طاقة محدودة تعطى اليه ولا تصل المادة الى حالة التوصيل
وتدعى هذه المادة ب(المادة العازلة) . الّا اذا كانت الطاقة المعطاة
عالية كفاية لانتقال الالكترون الى حزمة التوصيل فان التوصيل يمكن
ان يحدث وعند ذاك يكون العازل قد خُرِق أو انهار breaks down.
الحالة الوسط عندما تكون الفجوة بين حزمة التكافؤ وحزمة التوصيل
ليست كبيرة بحيث ان كمية قليلة من الطاقة (على شكل حرارة او ضوء
او مجال كهربائي) قد تكون كافية لنقل الالكترون الى مستوى التوصيل
وهذه المادة تسمى ب (شبه موصل semiconductor)



الشكل يمثل حزم الطاقة لثلاثة مواد مختلفة عند حرارة الصفر المطلق 0 K.
1) المواد الموصلة لا يوجد فيها فجوة طاقة بين حزمتي الطاقة .
2) المادة العازلة وفيها تكون فجوة الطاقة كبيرة بين الحزمتين
3) المادة شبه الموصلة وفيها فجوة صغيرة بين الحزمتين

التكافؤ

Valence electrons or conduction or free electrons, move under the influence of an electric field $\bar{E}$, an electron having a charge $Q = -e$ will experience a force:

$$\bar{F} = -e\bar{E}$$

Drift velocity V_d: In the crystaline material, the progress of the electron is impeded (يعاق) by continual collisions (تصادمات) with the thermally excited crystalline lattice, the average constant velocity is the drift velocity V_d.

قابلية التحرك (الانتقالية) μ_e

سرعة الانجراف $\rightarrow$ $\bar{V}_d = -\mu_e \bar{E}$ ----- (6)

where μ_e: is the mobility of an electron and is positive by difinition $\frac{m^2}{V.s}$

نلاحظ ان حركة الالكترون معاكسة لاتجاه المجال.

we have $J = \rho_v V \leftarrow$ السرعة

by sbst. in (6): كثافة الالكترونات الحرة

$$\boxed{\bar{J} = -\rho_e \mu_e \bar{E}} \text{ ---- } (7)$$

ρ_e: free electron charge density (negative value).

$$\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}} \text{ ------ } (8)$$

الصيغة النقطية لقانون أوم

σ: Conductivity (Siemens/meter)

1 Siemens يمثل وحدة التوصيلية

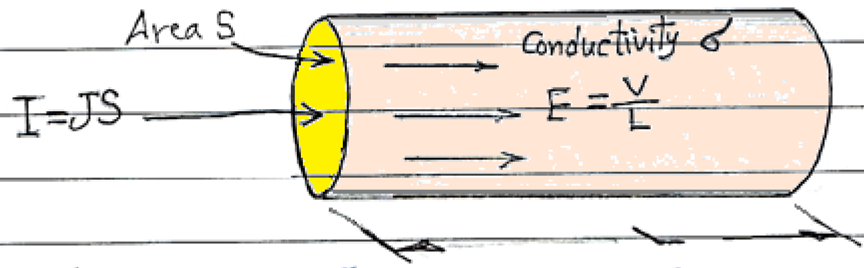
$1 \text{ siemens} = \frac{1A}{1V} = \mho = \frac{1}{\Omega}$

σ: (sigma): Conductivity measured in siemens per meter (S/m)

$$\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e} \text{ ---- } (9)$$

مساحة المقطع

$I = \int \bar{J} \cdot d\bar{s} = J\, S$ ....(10) ($\bar{J}$ & $\bar{E}$ are uniform in cylindrical region).



potential difference $\to$ $V_{ab} = -\int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{L} = -E \cdot \int_b^a dL = -E \cdot L_{ba}$

or: $= \bar{E} \cdot L_{ab}$

potential $\to$ $V = E\,L$

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L} \qquad \therefore \frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

قانون أوم $\boxed{V = I\,R}$ ---- (12)

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S} \; (\Omega)} \quad \text{-- (13)}$$

جدول لقيم التوصيلية لبعض الموصلات

σ	التوصيلية
Aluminume	3.82×10^{7}
Copper	5.80×10^{7}
Silver	6.17×10^{7}

for other conductors : Appendix C in Text book from eq's (10), (8), and (11) we may write the general form for resistance when the fields are nonuniform:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{L}}{\int_s \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s}} \quad \text{----} (14)$$

Example 5.1 find the resistance, current density if 10A pass throug the wire, field intensity drift velocity of 1.609 Km length of a cylindrical c.c.s. copper wire with a diameter of 1.291 mm?

ذي مقطع دائري

Sol: Cross section area is: $\pi r^2 = \pi \left(\frac{1.291 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 =$

$\therefore S = 1.308 \times 10^{-6}\ m^2$

$\sigma_{aluminum} = 5.8 \times 10^7\ S/m$

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{1609}{(5.8 \times 10^7)(1.308 \times 10^{-6})} \ 21.2\ \Omega$$

for 10A dc, $J = \frac{I}{S} = \frac{10}{(1.308 \times 10^{-6})} = 7.65 \times 10^6\ A/m^2$

or $7.65\ A/mm^2$

the potential difference between the two ends:

$V = I * R = 10 * 21.2 = 212\ V$

the electric field intensity $E = 0.312\ V/m$ from $E = \frac{V}{L}$

drift velocity $\bar{V}_d = 0.000422\ m/s$

$\rho_e = -1.81 \times 10^{10}\ C/m^3$

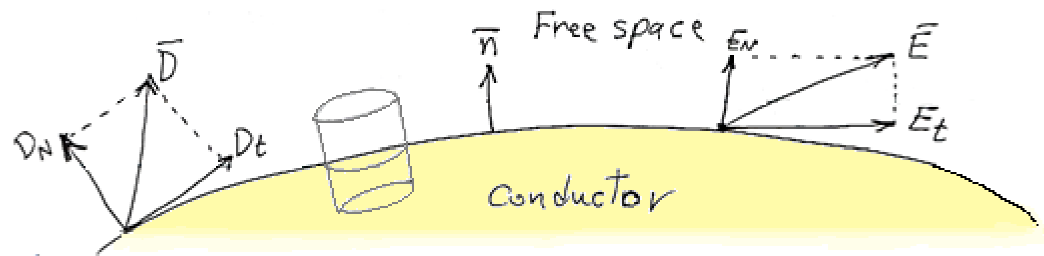
Conductor properties and Boundary Conditions

بشرط الكهربائية المستقرة

For electrostatics: • No charge may exist at any point within a conducting material.

• no electric field may exist at any point within a conducting material.

• charges may appear on the surface as ρ_s (surface charge density).



$\oint E \cdot dL = 0 \Rightarrow E_t = 0$, $\oint D \cdot ds = 0 \Rightarrow D_N \Delta S = Q = \rho_s \Delta S \Rightarrow D_N = \rho_s$

If the external field is decomposed into two component: E_t & E_N.

1- E_t : tangental component of $\bar{E}$; $\boxed{E_t = \text{Zero}}$, because if E_t is not zero, a tangental force would be applied to the surface charges and it will moved and non static condition. and also $\boxed{D_t = 0}$.

2- E_N : Normal component of $\bar{E}$. (by Gauss's law, the electric flux leaving a small increment of surface must equal to the charge on that suface. but the flux cannot penetrate into the conductor. it must then leave the surface normally.

$$\boxed{D_N = \rho_s}$$

$$\boxed{D_t = E_t = 0} \quad \text{----} (15)$$

$$\boxed{D_N = \epsilon_o E_N = \rho_s} \quad \text{----} (16)$$

by using the vector fields :

$E_t = 0$

$$\bar{E} \times \bar{n} \Big|_s = 0 \quad \text{----} \quad (17)$$

$D_N = \rho_s$

$$\bar{D} \cdot \bar{n} \Big|_s = \rho_s \quad \text{--------} (18)$$

where $\bar{n}$: is the unit normal vector at the surface that points away from the conductor.

if $E_t = 0$ $\therefore$ The conductor surface is an equipotential surface. $\quad E \cdot dL = 0$

سطح تساوي الجهد: (Equipotential Surface) وهو السطح الذي تكون جميع نقاطه متساوية في الجهد الكهربائي

Summary:

1- The static electric field intensity inside a conductor is zero.

2- " " " " " at the surface of a conductor is everywhere directed normal to the surface.

3- The conductor surface is an equipotential surface.

Example 5.2

If $V = 100(x^2 - y^2)$ and a point $P(2,-1,3)$ that lie on a conductor to free-space boundary. Find V, $\bar{E}$, $\bar{D}$ and ρ_s at P and also the equation of the conductor surface.

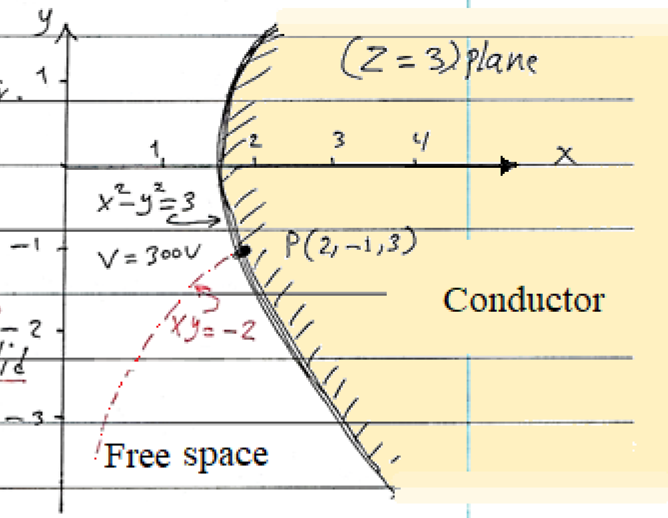
Solution: at $P(2,-1,3)$; $V_P = 100[2^2 - (-1)^2] = 300V$

for $\bar{E} = 0$ within the conductor: the potential (300V) in and on the conductor.

$$300 = 100(x^2 - y^2)$$

$x^2 - y^2 = 3$ is the equation of the conductor surface. as shown in figure. (assume the solid conductor lies above and to the right)

هذه فرضية فرضناها للحل



$$\boxed{\bar{E} = -\nabla V = -\text{grad } V}$$

$$\bar{E} = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\,\bar{a}_x + 200y\,\bar{a}_y$$

At P: $\bar{E}_P = -400\,\bar{a}_x - 200\,\bar{a}_y$ V/m

$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$:

$$\bar{D}_P = 8.854 \times 10^{-12}\,\bar{E}_P = -3.54\,\bar{a}_x - 1.771\,\bar{a}_y \ \text{nc/m}^2$$

The field is directed downward and to the left at P; it is normal to the equipotential surface.

$$D_N = |\bar{D}_P| = 3.96\ \text{nc/m}^2$$

$$\rho_{s_P} = D_N = 3.96\ \text{nc/m}^2$$

Note that: if we had taken the region to the left of the equipotential surface as the conductor $\rho_s = -3.96\ \text{nc/m}^2$

Example 5-3 p 123

يعتبر تكملة للمثال السابق Ex 5.2 وذلك لرسم خطوط المجال

to determine the equation of the streamline passing through point P

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{200y}{-200x} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

Thus $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln y + \ln x = C_1$

$$xy = C_2$$

The line (or surface) through P is obtained when $C_2 = (2)(-1) = -2$,

$\therefore xy = -2$ (by drawing this eq. on the above figure).

D 5.5 a potential: $V = 100 \sinh 5x \sin 5y$ V in free space and a point $P(0.1, 0.2, 0.3)$ find at P:

a) V, b) $\bar{E}$, c) $|\bar{E}|$, d) $|\rho_s|$ (Note: P is lies on a conductor surface.

Solution: at P $V = 100 \sinh(0.5) \sin(\underset{\text{rad}}{1})$

where $\boxed{\sinh x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)}$ $= 100\left(\frac{e^{0.5} - e^{-0.5}}{2}\right) \sin\left(\frac{1 \times 180}{\pi}\right)$

$= 43.8$ V

$\bar{E} = -\nabla V = -\text{grad } V = -100\left[\sin\left(\frac{180}{\pi}\right) \frac{d}{dx}\left(\sinh 5x\right) \bar{a}_x\right.$ $\left. + 5\left\{\sinh(5x) \cdot \cos(5y)\right\} \bar{a}_y\right]$

$= -500\left\{\sin\left(\underset{(5y)\text{ rad}}{\frac{180}{\pi}}\right)\left(\frac{e^{0.5} + e^{-0.5}}{2}\right)\right\}\bar{a}_x + \left\{\left(\frac{e^{0.5} - e^{-0.5}}{2}\right) \cos\left(\frac{180}{\pi}\right)\right\}\bar{a}_y$

$\overline{E} = -474\,\overline{a_x} - 140.8\,\overline{a_y}$ V/m

c) $|\overline{E}|_{at\,p} = \sqrt{474^2 + 140^2} = 495$ V/m

d) $|\overline{D}| = |\epsilon_0 \overline{E}| = 4.38\ nC/m^2$

$\therefore \rho_s = 4.38\ nC/m^2$