المتجهات في أنظمة الاحداثيات COORDINATE SYSTEMS

سنقتصر على ثلاثة انواع فقط من أنظمة الاحداثيات وهي:

1- النظام الكارتيزي (Cartesian coordinate system)

2- النظام الاسطواني (Cylindrical coordinate system)

3- النظام الكروي (Sphirical coordinate system)

يُمثل المتجه (vector) بثلاث مُرَكبات (components) ، كل مُركبة تكون عمودية على الاخرى وباتجاه أحد المحاور الرئيسية لذلك النظام، فمثلا في النظام الكارتيزي (Cartesian Coordinate System) يكون المتجه: $\mathbf{A} = A_x\mathbf{a_x} + A_y\mathbf{a_y} + A_z\mathbf{a_z}$

فتكون مركبات المتجه هي $A_x\mathbf{a_x}$, $A_y\mathbf{a_y}$, $A_z\mathbf{a_z}$ وكل مركبة عبارة متجه باتجاه أحد المحاو، وعند جمعها يتشكل المتجه الاصلي **A**.

وقيم مركبات المتجه هي A_x , A_y , A_z وهي عبارة عن قيم (Scalar) أي أرقام أو متغيرات.

مثلا عندما تكون قيم المركبات أرقام تكون صيغة المتجه **A** كما يلي: $\mathbf{A} = 2\mathbf{a_x} - 3\mathbf{a_y} + 7\mathbf{a_z}$ حيث ان $A_x=2$, $A_y=-3$, $A_z=7$

ومثال كون قيم المركبات متغيرات، عندما تكون صيغة المتجه **A** كما يلي: $\mathbf{A} = 5y^2\mathbf{a_x} - xz\mathbf{a_y} - 4z\mathbf{a_z}$ حيث ان $A_x=5y^2$, $A_y=-xz$, $A_z=-4z$

ملاحظة: يسمى المتجه (الذي تكون قيم مركباته متغيرات) يسمى vector field حيث تتغير مركباته عند تغير مكانه، أما عندما تكون قيم المركبات أرقام فان المتجه لا يتغير بتغير مكانه.

Vectors Transformations

نعني بتحويل المتجهات: تحويل المتجه من نظام الى آخر، والتحويل يطرأ على قيم المُرَكِبات فقط،

تحويل المتجه من النظام الكارتيزي الى النظام الاسطواني

Vector transformation from cartesian to cylindrical coordinate system

كما قلنا ان التحويل يطرأ على قيم المركبات فقط أي اننا نحول قيم المركبات ثم نضع معها متجهات الوحدة الخاصة بذلك النظام. ولاستخراج قيم المركبات الجديدة يمكن تطبيق المصفوفة التلية:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

لكن يجب تحويل المركبات الاصلية الى قيم بدلالة عوامل النظام الجديد أي بدلالة (ρ,Ø,Z).

ولتحويل المتجهات من النظام الاسطواني الى الكارتيزي يمكن تطبيق المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

ولتحويل المتجهات من النظام الكارتيزي الى الكروي يمكن تطبيق المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ولتحويل المتجهات من النظام الكروي الى الكارتيزي يمكن تطبيق المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

TABLE 1 Three Orthogonal Coordinate Systems

Coordinate system	Cartesian	Cylindrical	Spherical
Coordinate variables	(x, y, z)	(ρ, ϕ, z)	(r, θ, ϕ)
Unit vectors	$\mathbf{a_x}, \mathbf{a_y}, \mathbf{a_z}$	$\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a_z}$	$\mathbf{a_r}, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi$
Unit vectors properties	$\mathbf{a}_x \bullet \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \bullet \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \bullet \mathbf{a}_z = 1$ $\mathbf{a}_x \bullet \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x \bullet \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_y \bullet \mathbf{a}_z = 0$ $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_\rho \bullet \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \bullet \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \bullet \mathbf{a}_z = 1$ $\mathbf{a}_\rho \bullet \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\rho \bullet \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\phi \bullet \mathbf{a}_z = 0$ $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$ $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho$ $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_r \bullet \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \bullet \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \bullet \mathbf{a}_\phi = 1$ $\mathbf{a}_r \bullet \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_r \bullet \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\theta \bullet \mathbf{a}_\phi = 0$ $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$ $\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r$ $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$
Differential length **dl**	$dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$	$d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a_z}$	$dr\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$
Differential surface areas	$d\mathrm{s}_x = dydz\mathbf{a}_x$ $d\mathrm{s}_y = dxdz\mathbf{a}_y$ $d\mathrm{s}_z = dxdy\mathbf{a}_z$	$d\mathrm{s}_\rho = \rho d\phi dz\mathbf{a}_\rho$ $d\mathrm{s}_\phi = d\rho dz\mathbf{a}_\phi$ $d\mathrm{s}_z = \rho d\rho d\phi\mathbf{a}_z$	$d\mathrm{s}_r = r^2\sin\theta d\theta d\phi\mathbf{a}_r$ $d\mathrm{s}_\theta = r\sin\theta dr d\phi\mathbf{a}_\theta$ $d\mathrm{s}_\phi = rdrd\theta\mathbf{a}_\phi$
Differential volume dv	$dxdydz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$
Vector (**A**) Representation	$A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$	$A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$	$A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$
Dot Product **A•B**	$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	$A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_zB_z$	$A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$
Cross Product $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$	$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$

TABLE 2 Summary of the Transformation between Coordinate Systems

Transformation	Coordinate variables	Vector components
Cartesian to cylindrical	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $z = z$	$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$
Cylindrical to Cartesian	$x = \rho\cos\phi$ $y = \rho\sin\phi$ $z = z$	$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$
Cartesian to spherical	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$
Spherical to Cartesian	$x = r\sin\theta\cos\phi$ $y = r\sin\theta\sin\phi$ $z = r\cos\theta$	$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$
Cylindrical to spherical	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)$ $\phi = \phi$	$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$
Spherical to Cylindrical	$\rho = r\sin\theta$ $\phi = \phi$ $z = r\cos\theta$	$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$